



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

本科生毕业论文

题目：单输入神经网络的性能比较以及

二输入 Legendre 神经网络的建立

院系：信息科学与技术学院 自动化系

专业：自动化

学生姓名：陈锦浩

学号：08378040

指导教师：张雨浓（教授）

二〇一二年五月

附表一 本科生毕业论文开题报告

| | | | | | | | |
|---------------------------|---|------------------------------------|----------|------|---|----|----|
| 学生姓名 | 陈锦浩 | 学号 | 08378040 | 指导老师 | 张雨浓 | 职称 | 教授 |
| 开题情况 | 论文题目 | 单输入神经网络的性能比较以及二输入 Legendre 神经网络的建立 | | | | | |
| | <p>选题依据（简述选题的目的、思路、方法、相关支持条件及进度安排）：</p> <p>一、选题目的：近年来，人工神经网络因其高度并行，分布式存储以及自适应学习等显著特点，被广泛运用于各种科学领域及工程领域，包括控制系统设计，信号处理和特征识别等。BP (back propagation)神经网络模型及其改进模型是当前运用较为广泛的神经网络模型之一，但由于其自身存在收敛速度慢并易陷入局部极小点等缺陷，人们提出了包括对标准梯度下降算法的改进以及基于数值优化的改进等多种改进算法。而这些算法难以从根本上解决 BP 算法内在的不足，对此，一种通过改进网络结构和激励函数类型的办法被提出。在此基础上，为了满足实际中的数据预测需要，急需对各种多项式神经网络的预测能力进行比较，此外，针对现实中对多输入系统识别的需求，也需要我们通过利用多元函数逼近定理构建多输入人工神经网络模型并设计相应的权值与结构确定算法。</p> <p>二、思路以及方法：通过对原有的需要人为确定期望误差的单输入人工神经网络的结构自确定算法，设计一种适用于不同单输入多项式神经网络的权值与结构确定算法，并通过该算法比较不同多项式对网络的学习能力及预测能力的影响。此外，基于多元函数逼近理论，利用 Legendre 构建一种二输入前向神经网络。基于已设计的单输入神经网络的权值与结构确定算法，采用两种不同的限制法则设计两种不同增长速度的权值与结构确定算法，从而自动快速地确定二输入 Legendre 神经网络的最优权值和最优结构。利用 matlab 编写程序对所设计的算法进行数值验证。</p> <p>三、相关支持条件：图书馆、实验室、相关资料（《神经网络权值直接确定法》，张雨浓 杨逸文 李巍 著，中山大学出版社）、软件（matlab R2007A）</p> <p>四、进度安排：</p> <p>（1）2011 年 11 月 1 日至 2011 年 12 月 31 日：通过阅读论文及相关书籍，了解当前该领域的最新进展，初步完成统一的单输入神经网络的权值与结构确定算法。列举数十个目标函数，通过权值与结构确定算法比较所构建的不同多项式神经网络的预测能力和学习能力。</p> <p>（2）2012 年 1 月 1 日至 2012 年 3 月 1 日：开始研究多元函数逼近方法，初步构建二输入 Legendre 神经网络；基于单输入网络的权值与结构确定算法，设计适用于二输入 Legendre 神经网络的增长型的权值与结构确定算法，通过数值实验验证算法有效性及二输入网络的学习、泛化和预测性能。</p> <p>（3）2012 年 3 月 2 日至 2012 年 4 月 1 日：通过多与老师、师兄以及同学交流，撰写论文，完成初稿。</p> <p>（4）2012 年 4 月 2 日至 2012 年 4 月 30 日：通过与老师面对面展示，交流，并根据老师提出的意见修改论文。</p> | | | | | | |
| | <p>指导教师意见： 研究内容具有较强的实用价值，进度安排合理，同意开题。</p> | | | | | | |
| | <p>1、同意开题 (✓)</p> <p>2、修改后开题 ()</p> <p>3、重新开题 ()</p> | | | | <p>具体建议： 应注意要基于最新的研究成果；研究过程要细致认真；需严格按照已定的进度安排；努力取得突破性成果。</p> | | |
| <p>指导教师签名： 张雨浓</p> | | | | | <p>2011 年 11 月 1 日</p> | | |

附表二 毕业论文过程检查情况记录表

指导教师分阶段检查论文的进展情况（要求过程检查记录不少于3次）：

第1次检查

学生总结：

阅读神经网络的相关论文及书籍，较深入地了解了该领域的最新进展。选用了 Legendre 多项式、Hermite 多项式、第一类 Chebyshev 多项式、第二类 Chebyshev 多项式、Bernoulli 多项式及幂函数构造六种不同多项式神经网络，确定适用于与该六种单输入神经网络的权值与结构确定算法的主体思路。在老师和师兄的指导下，逐步掌握 matlab 语言并根据算法主体思路初步完成程序编写。根据所列举的数十个目标函数，通过算法对这六种不同的单输入多项式神经网络的预测能力和学习能力进行了比较。完成第一阶段任务。

指导教师意见：

算法设计合理，能成功确定出各种单输入神经网络的最优权值和最优结构。接下来可开始尝试构建多输入神经网络，同时，对该单输入神经网络的算法进一步研究，并在其基础上设计适用于确定多输入神经网络的最优权值和最优结构的算法。

第2次检查

学生总结：

阅读相关论文和书籍研究多元函数的逼近方法，借鉴单输入网络的构建方法，利用 Legendre 多项式作为隐层激励函数构建了二输入 Legendre 神经网络。基于单输入网络的权值与结构确定算法，设计了适用于二输入 Legendre 神经网络的平方增长型的权值与结构确定算法。通过数值实验进一步验证该算法能有效地确定出二输入 Legendre 神经网络的最优结构，并获得相应的最优权值，同时在该算法的帮助下，二输入 Legendre 神经网络具有极强的学习、泛化和预测能力。

指导教师意见：

提出的二输入 Legendre 神经网络具有一定的创新性，能够将多项式神经网络推广到多输入系统中的应用中。所设计的算法运行结果良好，所确定的神经网络在学习、泛化和预测都能达到良好的性能。总体上，可继续考虑算法的优化和提高。另外，可开始着手论文的撰写工作，应注意数据、结果等的科学真实性。

第3次检查

学生总结：

针对老师对平方增长型的权值与结构确定算法的意见，继续研究相关的神经元增长方式，经过对相关文献的阅读，了解到还有多种对神经元（多元多项式）的排列方法。经过具体比较，最终采用字典升序法重新设计相应的权值与结构确定算法。数值实验验证了，相比于原先的平方增长型，该算法具有更高的学习速度，并且学习误差、校验误差和预测误差均有一定的减小。通过将平方增长及字典升序法进行总结，整理成两种限制法则，并最终将两种不同增长速度的算法统一化。另外，在老师地指导下，根据已有的实验数据，初步确定了毕业论文的主体架构，并完成了论文的主要章节。

指导教师意见：

提出的新算法在运行时间和运行结果上均在一定程度上优于原先算法，同时，

能将两种不同的增长方式归类整理成两种限制法则，并借助这两种限制法则对两种算法的统一化这一做法值得肯定。整体工作完成较好，可逐步完成毕业论文。

第 4 次检查

学生总结：

初步完成毕业论文的撰写，期间，多次根据张老师的意见进行认真修改。同时，请求实验室的师兄及同学对算法程序及论文进行检查和校对，确保程序的正确性和结果的真实性。经过张老师和师兄的指导以及自己的检查完善，最终完成了毕业论文的撰写。

指导教师意见：

该论文在内容上有较强的创新性，同时经过多次检查修改，在形式上也已经符合规定。

学生签名：陈锦浩

2012 年 5 月 4 日

指导教师签名：张雨浓

2012 年 5 月 4 日

总体完成情况

指导教师意见：

该论文内容上有较强的创新性，同时，具有一定的实际应用价值。整个研究过程，该文作者能始终保持科学严谨的研究态度，积极与老师及实验室的同学进行探讨，始终严格按照已定的进度安排，很好地完成了毕业论文的整体撰写工作。此外，该作者在毕业论文的撰写工作中，已逐渐掌握独立的科研能力，能够在完成毕业论文之余，成功完成数篇杂志论文和国际会议论文的投稿，其中已有部分被录用发表。另外，该论文撰写规范，文字、图和表的合理结合，章节间具有条理性的区分，保证了改论文整体思路通顺，研究内容表达清晰，更重要的是，所有数据结果均经过多次校对，真实性和科学性得到最大的保障。综上所述，该论文已达到优秀的水平。

- 1、按计划完成，完成情况优（）
- 2、按计划完成，完成情况良（）
- 3、基本按计划完成，完成情况合格（）
- 4、完成情况不合格（）

指导教师签名：张雨浓

2012 年 5 月 4 日

附表三 毕业论文答辩情况

| | | | |
|--------------------|--|----|-----|
| 答辩人 | 陈锦浩 | 专业 | 自动化 |
| 论文（设计）题目 | 单输入神经网络的性能比较 以及二输入 Legendre 神经网络的建立 | | |
| 答辩小组成员 | | | |
| 答辩记录： | | | |
| 记录人签名： _____ 年 月 日 | | | |

学术诚信声明

本人所呈交的毕业论文，是在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果，所有数据、图片资料均真实可靠。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本论文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确的方式标明。本毕业论文的知识产权归属于培养单位。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

本人签名：陈锦浩

日期：2012年5月4日

【论文摘要】针对数据预测在实际中的广泛应用，基于函数逼近理论与多项式插值理论，本文先利用 Legendre 多项式、Hermite 多项式、第一类 Chebyshev 多项式、第二类 Chebyshev 多项式、Bernoulli 多项式及幂函数构造六种不同多项式神经网络。基于神经网络的权值直接确定法，设计了一个适用于该六种神经网络的增长型权值与结构确定算法以确定其相应的最优网络结构。通过该算法，具体研究了不同隐层激励函数的选取对多项式神经网络的学习能力和预测能力的影响。数值验证结果表明，所构造的六种神经网络都有较佳的学习能力和一定的预测能力，而其中由 Hermite 多项式以及 Bernoulli 多项式构建的神经网络的学习和预测能力相对一般。

另一方面，考虑到单输入神经网络难以满足多数实际工程系统均为多输入系统的现实需要，构建一个多输入神经网络是十分必须的。基于多元函数逼近理论，本文创新性地构建了一种二输入 Legendre 正交基神经网络。同时，根据单输入的权值与结构确定算法，采用两种限制法则，设计了两种适用于该神经网络的增长型权值与结构确定算法。计算机仿真结果进一步表明了所构建的二输入 Legendre 正交基神经网络在学习以及预测方面的优越性能，同时所提出的增长型权值与结构确定算法能够快速有效地确定网络的最优结构以并获得最优权值，进一步地保证了网络的学习、泛化和预测能力。

【关键词】预测；学习；泛化；多项式神经网络；权值与结构确定算法；最优网络结构；最优权值

【Abstract】 With the wide use of data prediction considered, based on the function approximation theory and polynomial interpolation theory, the Legendre polynomials, the Hermite polynomials, the Chebyshev polynomials of class I, the Chebyshev polynomials of class II, the Bernoulli polynomials and the power functions are used as the activation functions to construct the single-input neural networks. and based on weight-direct-determination method, a weights-and-structure-determination algorithm is built up, which can be applied to these six aforementioned neural networks in the determination of the optimal structure. With such algorithm, the effect to the capability of learning and prediction of these six neural networks brought by the difference of activation functions is then discussed. Numerical results show that while such six neural networks all possess superior ability of learning and certain ability of prediction, the Hermite polynomial neural network and the Bernoulli polynomial neural network perform relatively ordinarily.

In addition, note that single-input neural networks may not meet directly the actual need that most practical systems have multiple inputs. It is thus worth further investigating multi-input neural networks. Based on the theory of the multivariate function approximation, a novel 2-input Legendre orthogonal polynomial neural network is constructed and investigated in this paper. Besides, based on the weights-and-structure-determination algorithm for single-input networks, with two different limitations, two novel weights-and-structure-determination algorithms of growing type are designed to determine the optimal structure and obtain optimal weights. Numerical study results further substantiate the superiority the 2-input Legendre orthogonal polynomial neural network in terms of learning, generalization and prediction, and that the proposed algorithms can determine the optimal structure and obtain optimal weights efficiently and thus guarantee the capability of the neural network.

【Keywords】 Prediction; Learning; Generalization; Polynomial neural network; Weights-and-structure-determination algorithm; Optimal structure of neural network; Optimal weights

目 录

| | |
|---------------------------------------|-----------|
| 第一章 前言 | 1 |
| 1.1 研究背景..... | 1 |
| 1.2 研究内容及意义..... | 2 |
| 1.3 论文结构安排..... | 3 |
| 第二章 多类单输入多项式神经网络预测能力比较 | 5 |
| 2.1 单输入多项式网络模型..... | 5 |
| 2.2 增长型权值与结构确定算法..... | 7 |
| 2.2.1 权值直接确定法..... | 7 |
| 2.2.2 权值与结构确定算法..... | 8 |
| 2.3 数值验证..... | 10 |
| 2.3.1 学习能力比较..... | 10 |
| 2.3.2 预测能力比较..... | 11 |
| 2.4 本章小结 | 15 |
| 第三章 二输入 Legendre 正交基神经网络 | 16 |
| 3.1 理论基础..... | 16 |
| 3.2 网络模型与算法..... | 19 |
| 3.2.1 网络模型..... | 19 |
| 3.2.2 权值直接确定法..... | 20 |
| 3.2.3 两种不同增长速度的权值与结构确定算法..... | 21 |
| 3.3 数值实验结果..... | 24 |
| 3.4 本章小结 | 28 |
| 第四章 总结与展望 | 29 |
| 4.1 总结与分析..... | 29 |
| 4.2 未来研究展望 | 30 |
| 参考文献 | 31 |
| 致谢 | 33 |
| 附录 攻读学士学位期间的学术成果 | 34 |

第一章 前言

人工神经网络是模拟生物神经系统的组织结构、处理方式以及系统功能的简化系统^[1,2]，是人工智能的一个分支，是一门始于 20 世纪 40 年代的新兴交叉学科，涉及数学、电子与控制、计算机科学、脑科学、神经生理学、认知科学、非线性动力学等众多学科领域^[3]。众所周知，人类大脑是思维活动的物质基础，而思维是人类智能的集中体现。而人工神经网络就是由大量处理单元（神经元）广泛连接而成的网络，是对人脑的抽象、简化和模拟，试图反映人脑的基本特性^[4]。

1.1 研究背景

近年来，人工神经网络因其高度的并行性、分布式存储、自适应学习能力等显著的特点，使得它在人工智能、模式识别、信号处理和机器人及非线性控制等领域有着广泛的应用^[5-9]。在实际应用中，很多人工神经网络模型都是基于误差回传(Back Propagation, BP)的前向神经网络模型或其变形体，它们可以说是应用最为广泛也是最为重要的网络模型之一^[10]。但是传统的 BP 神经网络及其学习算法存在以下一些固有的缺陷^[11]：1) 学习率和网络结构的确定缺乏完善的理论指导；2) 迭代过程冗长，收敛速度较慢；3) 易陷入局部极小而难以达到全局最优。为此，国内外研究者从不同角度，如学习率、学习算法、激励函数、网络模型等各个方面来改进该类传统人工神经网络的性能或网络模型^[11,12]。大体而言，学习算法的改进可以分为两大类^[10]：1) 基于标准梯度下降法的改进（如加动量项等）；2) 基于数值优化方法的改进[如采用拟牛顿法或 Levenberg-Marquardt (LM)算法等]。这些改进算法能在一定程度上优化传统 BP 算法，但并未从根本上克服上述缺陷。

传统上，神经网络的各个神经元一般采用的是本质上相同的激励函数，然而，当每个神经元中的激励函数一样时，它们在网络中起的作用也是一样的。这样做法的缺点是各个神经元不能相互弥补不足，不能相互促进^[12]。为了克服这种缺点并解决大多数前向式神经网络都存在的固有问题，Zhang 等人提出了以一系列线性无关或者正交的多项式作为隐层激励函数的神经网络^[13-20]。利用基于伪逆思想的权值直接确定法，该类型的网络可以在确定最优权值方面避免了耗时的迭代训练过程，同时在函数逼

近、去噪、预测和隐节点数选取上也能取得较好的成果^[13-20]。但是，在 Zhang 等人前期的工作中，一般是通过给定精度从而确定网络结构（神经元数目），而现实中难以人为地指定神经网络的最优学习精度从而得到全局最优的网络结构，因而这种做法具有一定的局限性。

考虑到实际应用中，数据预测被广泛应用于股票市场、地震预测以及交通控制等方面^[21,22]。而数据预测的本质是确定已有数据以及预测数据之间的函数关系，一般来说，这种关系是非线性的^[23]。因而，将具有自组织、自学习能力以及非线性逼近能力的人工神经网络应用于数据预测十分有效。而文献[13-20]提出了多种不同多项式神经网络，但只停留在对其学习能力的研究上，而很少（甚至没有）涉及神经网络预测能力的研究。另外，为了达到最好的学习和预测结果，我们需要通过进一步的比较确定学习能力及预测能力相对优越的多项式神经网络。

另外，由于现实系统多为多输入系统，而由文献[13-20]所提出的单输入神经网络无法满足实际应用的需求。因而，提出并研究多输入神经网络将更具有现实意义。如前所述，由于难以通过指定学习精度得到全局最优的网络结构，同时，对于二输入神经网络最优结构的确定算法，我们又不能简单地通过将适用于单输入神经网络的权值与结构确定算法推广得到，因而，设计一个适用于多输入神经网络的最优结构确定算法也是十分有必要的。

1.2 研究内容及意义

本文首先介绍利用 Legendre 多项式、Hermite 多项式、第一类 Chebyshev 多项式、第二类 Chebyshev 多项式、Bernoulli 多项式及幂函数作为隐层激励函数所构造的单输入多项式神经网络模型，然后，基于权值直接确定法设计一个适用于这六种神经网络的增长型权值与结构确定算法。通过这个增长型权值与结构确定算法进一步研究不同多项式的选取对神经网络学习能力以及预测能力所产生的影响。

另外，基于多元函数逼近理论^[24,25]，本文通过以 Legendre 正交多项式构建了一个二输入三层前向神经网络。同时，根据前期的工作[13-20]可以总结出，神经元数目会极大地影响神经网络的性能。因而，本文通过进一步研究二输入 Legendre 正交基神经网络的神经元数及学习误差之间的关系，设计出两种适用于该网络的增长型权值与结构确定算法。通过这两种算法，本文进而研究了二输入 Legendre 正交基神经网

络的学习、泛化及预测性能。

据作者所了解到的情况，现有的工作极少有涉及到一下三个方面：1) 设计一个可用于自动确定多种多项式神经网络的最优网络结构的权值与结构确定算法；2) 研究不同多项式的选取对神经网络学习能力以及预测能力所产生的影响；3) 提出二输入的正交多项式网络并设计用于自动确定其最优结构的权值与结构确定算法。因此，本文的主要贡献有如下五点：

一、设计一种增长型权值与结构确定算法，可快速自动确定出六种单输入多项式神经网络的最优网络结构。避免了 BP 算法的冗长迭代运算，同时也避免了需要人为确定并输入相关参数（如期望误差等）。

二、利用设计的权值与结构确定算法确定出各种多项式神经网络的最优结构，从而，进一步验证了利用不同正交或线性无关的多项式所构造的单输入三层前向神经网络具有优越的学习能力。

三、第一次比较全面地比较了多种多项式神经网络的预测能力，进而确定出相对适合于预测的多项式神经网络，为多项式神经网络在数据预测领域的应用迈出了重要的一步。

四、提出并设计出利用 Legendre 正交多项式作为激励函数的二输入三层前向神经网络，为更多输入的神经网络的建立奠定了基础。

五、针对所提出的二输入 Legendre 正交基前向神经网络，设计出两种不同增长速度的权值与结构确定算法，均能自动快速地确定出该神经网络的最优结构。利用所提出两种算法对二输入 Legendre 正交基前向神经网络进行了一系列学习和预测实验，结果表明，在这两种算法的配合下，该网络具有优越的学习、泛化以及预测性能。

1.3 论文结构安排

本文的内容安排具体如下：

第一章为本文的前言。具体介绍本文研究方向的现况及其不足，在此基础上，介绍本文的研究内容和研究意义。

第二章为多类单输入多项式神经网络预测能力比较。先利用 Legendre 多项式、Hermite 多项式、第一类 Chebyshev 多项式、第二类 Chebyshev 多项式、Bernoulli 多项式及幂函数作为隐层激励函数所构造的单输入多项式神经网络，并设计统一的权值

与结构确定算法确定各个多项式网络的最优结构及最优权值,进而具体比较了的该六个多项式神经网络的学习能力和预测能力。

第三章为二输入 Legendre 正交基神经网络。基于多元函数逼近定理,建立了一种新型的二输入 Legendre 正交基神经网络。另外,为了自动快速地确定该网络的最优网络结构并获得网络的最优权值,基于第二章提出的单输入神经网络的权值与结构确定算法,我们采用了不同的限制法则设计了两种不同增长速度的权值与结构确定算法。通过数值实验进一步验证了,在这两种算法的帮助下,我们所提出的二输入 Legendre 正交基神经网络拥有优越的学习能力、泛化能力以及预测能力。

第四章为本文的总结与展望。具体对本文的内容进行了总结并分析了各部分内容的研究意义,同时,对人工神经网络未来的研究前景进行适当的展望。

第二章 多类单输入多项式神经网络预测能力比较

如前言所述, 为了克服 BP (Back Propagation)神经网络及其算法的内在缺陷, 权值直接确定法以及结构自确定算法被 Zhang 等人提出^[13-20]。然而, 该结构自确定算法需要人为给定期望的逼近精度等参数, 不适于广泛的应用。因此, 基于现实应用对数据预测的极大需求, 同时, 为了克服以往结构自确定算法的不足, 本章首先根据多项式插值与逼近理论, 利用 Legendre 多项式、Hermite 多项式、第一类 Chebyshev 多项式、第二类 Chebyshev 多项式、Bernoulli 多项式以及幂函数构建单输入三层前向神经网络。然后, 在权值直接确定法及前期的结构自确定算法的基础上, 设计一种适用于所构建的六种单输入多项式神经网络的权值与结构确定算法, 从而自动快速地确定该六种神经网络的最优结构。最后, 通过所确定的最优网络结构比较这六种神经网络在学习和预测方面的能力差异。

2.1 单输入多项式网络模型

多项式前向神经网络是基于多项式插值与逼近理论提出的。这种网络的特点是各个神经元的激励函数是线性无关或者彼此正交的多项式函数。本节在给出具体的单输入多项式前向神经网络模型之前, 先具体给出如下关于 Legendre 多项式、Hermite 多项式、第一类 Chebyshev 多项式、第二类 Chebyshev 多项式、Bernoulli 多项式以及幂函数的定义。

定义 1^[15] 满足如下递推关系的多项式:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x \\ \varphi_{k+2}(x) = \frac{2k+1}{k+1}x\varphi_{k+1}(x) - \frac{k}{k+1}\varphi_k(x), k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.1)$$

称为 Legendre 多项式, 其中 x 的定义域为 $[-1, 1]$ 。

定义 2^[16] 满足如下递推关系的多项式:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = 2x \\ \varphi_{k+2}(x) = 2x\varphi_{k+1}(x) - 2k\varphi_k(x), k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.2)$$

称为 Hermite 多项式, 其中 x 的定义域为 $(-\infty, \infty)$ 。

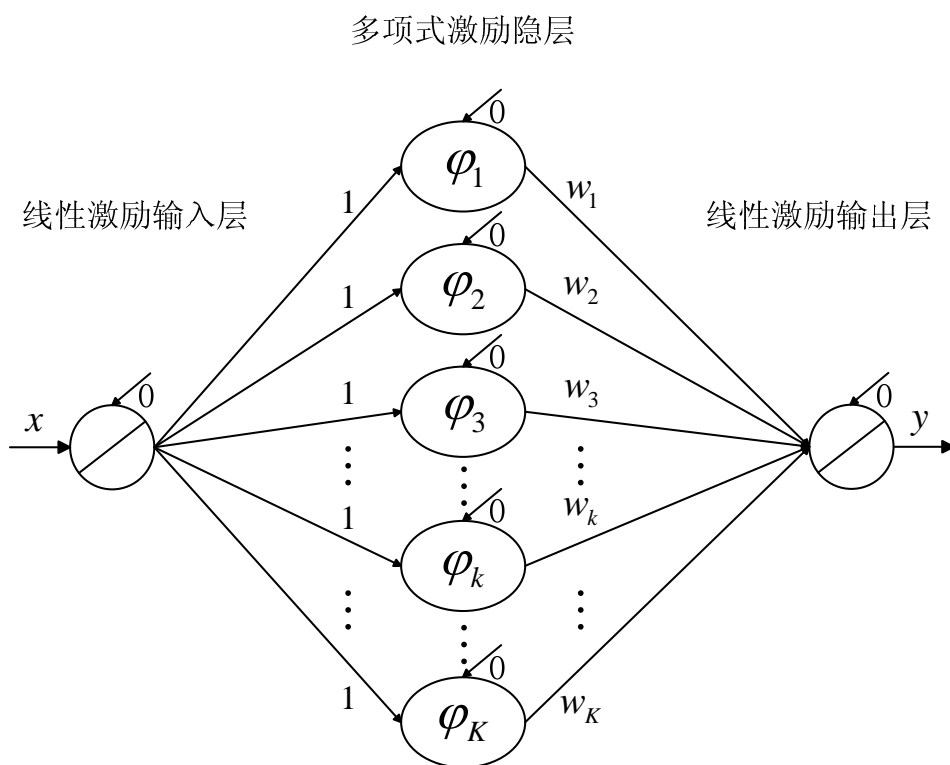


图 2.1 单输入多项式神经网络结构

定义 3^[17] 满足如下递推关系的多项式:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x \\ \varphi_{k+2}(x) = 2x\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x), k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.3)$$

称为第一类 Chebyshev 多项式, 其中 x 的定义域为 $[-1, 1]$ 。

定义 4^[18] 满足如下递推关系的多项式:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = 2x \\ \varphi_{k+2}(x) = 2x\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x), k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.4)$$

称为第二类 Chebyshev 多项式, 其中 x 的定义域为 $[-1, 1]$ 。

定义 5^[19] 满足如下递推关系的多项式:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 \\ \varphi_k(x) = x^{k-1} - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{k!}{(j-1)!(k+1-j)!} \right) \varphi_j(x), j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.5)$$

称为 Bernoulli 多项式, 其中 x 的定义域为 $(-\infty, \infty)$ 。

定义 6^[20] 满足如下递推关系的函数序列:

$$\varphi_k(x) = x^{k-1}, k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

称为幂函数序列(本文统一简称为幂函数), 其中 x 的定义域为 $(-\infty, \infty)$ 。

如图 2.1 所示, 本章所研究的多项式神经网络在结构上是一样的, 均为三层前向神经网络。其中, 为了计算的方便, 输入层到隐含层之间的权值均设为 1, 并且所有神经元的阈值均设为 0。输入层由信号源节点组成; 中间层称为隐层, 其激励函数可以为一系列线性无关或者正交的多项式; 第三层为输出层, 它是对各个隐层神经元作线性加权输出。在本章中, 上述六种正交或线性无关多项式将被用来作为网络的隐层激励函数从而构造相应的单输入多项式神经网络。

2.2 增长型权值与结构确定算法

本节将在权值直接确定法^[13,14]的基础上设计一个适用于提出的六种单输出多项式神经网络的增长型权值与结构确定算法。

2.2.1 权值直接确定法

对于图 2.1 所示的网络结构, 其隐层到输出层直接的权值可以通过给定的学习数据利用权值直接确定法一步得到。

定理 1 图 2.1 所示的单输入多项式神经网络中隐层与输出层的最优权值可以直接确定为

$$\mathbf{w} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.7)$$

其中, 上标 T 表示矩阵或向量的转置; 另外, 权值列向量 \mathbf{w} , 输入激励矩阵 \mathbf{X} , 目标输出列向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 分别定义为

$$\mathbf{w} := [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_k \ \dots \ w_K]^T \in R^K, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{X} := \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_K(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_K(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_Q) & \varphi_2(x_Q) & \dots & \varphi_K(x_Q) \end{bmatrix} \in R^{Q \times K}, \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\gamma} := [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_q \ \dots \ \gamma_Q]^T \in R^Q. \quad (2.10)$$

上式中, K 为给定的隐层神经元数目, Q 为给定的总的学习数据量。值得指出的是, 式(2.7)中 $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ 为输入激励矩阵 \mathbf{X} 的伪逆, 可用 MATLAB 中的 `pinv(X)` 命令求得, 因此(1)也可以简写为 $\mathbf{w} = \text{pinv}(\mathbf{X})\boldsymbol{\gamma}$ 。

2.2.2 权值与结构确定算法

总结我们前期的工作^[13-20]可以发现: 神经网络的性能会很大程度地受到神经元数目 (主要是隐层神经元数目 K) 的影响。具体来说, 太少的神经元可能无法让网络达到期望的性能, 而过多的神经元将会使网络结构冗余, 甚至可能导致过拟合现象的出现。为了准确衡量神经网络的性能, 本文将其实量化为网络输出与期望输出的均方误差, 具体定义如下:

$$E = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \left(\gamma_q - \sum_{k=1}^K w_k \varphi_k(\chi_q) \right)^2, \quad (2.11)$$

其中 $\chi_q \in R$ 为第 q 个采样输入, γ_q 为相应的期望输出, Q 表示总的学习数据量, 即给定的学习数据表示为 $\{\chi_q, \gamma_q\}_{q=1}^Q$ 。

因此, 可以通过逐渐增加隐层神经元数目, 研究均方误差 E 的变化规律, 最终确定出最优的网络结构(即最优隐层神经元数目)。具体的权值与结构确定算法的流程图如图 2.2 所示, 该算法适用于前面构造的六种单输入多项式神经网络。为了更加清晰地描述权值与结构确定算法, 相关参数及具体流程描述如下:

- E : 当前网络的均方误差;
- E_{\min} : 当前找到的最小均方误差;
- i : 当前网络隐层神经元数目;
- i_{\min} : 当前找到的最优网络隐层神经元数目。

步骤 1 获得学习数据 $\{\chi_q, \gamma_q\}_{q=1}^Q$ 。令 $i \leftarrow 2$, $i_{\min} \leftarrow 2$ 并根据相应多项式初始化神经网络结构。令 E_{\min} 足够大 (如 $E_{\min} \leftarrow 10$), 然后进入步骤 2;

步骤 2 令 $i \leftarrow i+1$, 计算相应的多项式, 增加 1 个神经元, 重新构造神经网络, 然后进入步骤 3;

步骤 3 根据重新构建的神经网络结构, 利用权值直接确定法(2.7)计算隐层和输

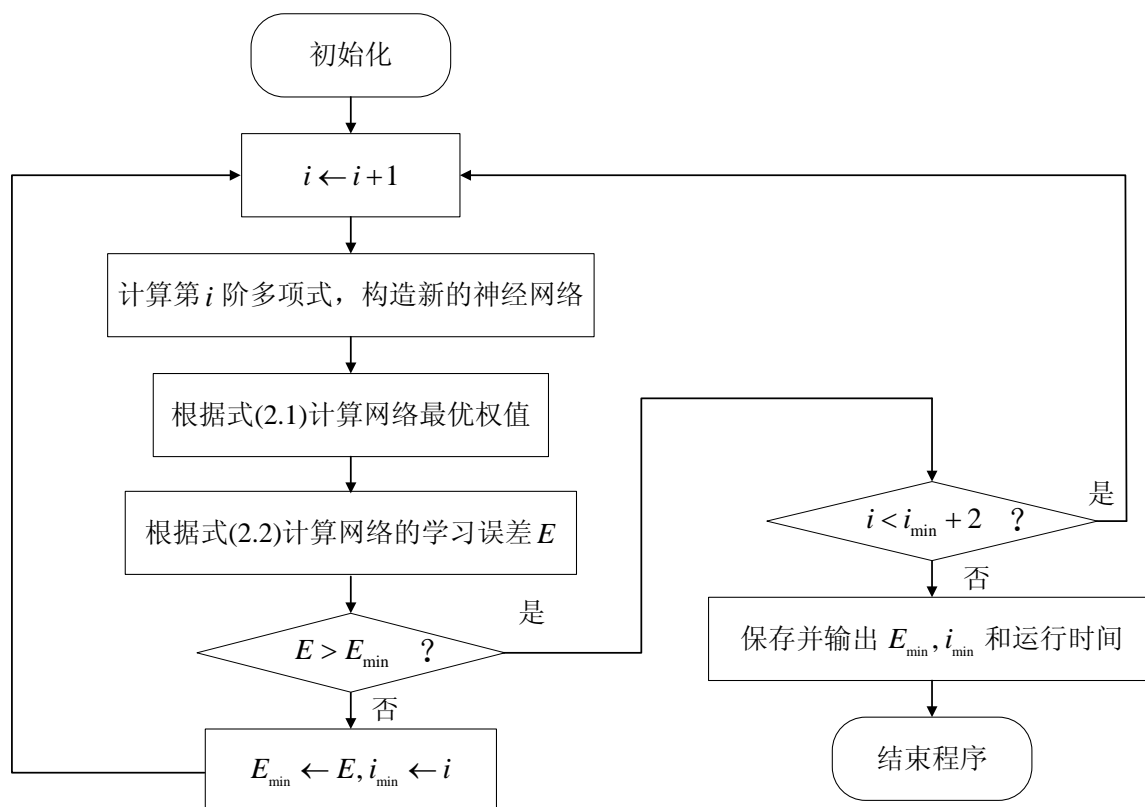


图 2.2 适用于六种单输入多项式神经网络的权值与结构确定算法

出层的连接权值，再根据式(2.11)计算均方误差 E ，然后进入步骤 4；

步骤 4 比较 E 和 E_{\min} 的大小，若 $E > E_{\min}$ ，则进入步骤 5；否则，令 $E_{\min} \leftarrow E$ ， $i_{\min} \leftarrow i$ ，然后返回步骤 2；

步骤 5 比较 i 和 $i_{\min} + 2$ 的大小，若 $i < i_{\min} + 2$ ，则返回步骤 2；否则，进入步骤 6；

步骤 6 保存并输出最优神经元数目 i_{\min} ，最小均方误差 E_{\min} 以及运行时间，结束程序。

值得进一步说明的是算法最后将 $i < i_{\min} + 2$ 做为结束判断标准是基于以下假设：连续两次神经元数目的增长均使均方误差 E 不减反增，则该 i_{\min} 为最优神经元数目。这是经过多次实验得到的结论。另外，上述权值与结构确定算法不仅适用于本章所提到的利用 Legendre 多项式、Hermite 多项式、第一类 Chebyshev 多项式、第二类 Chebyshev 多项式、Bernoulli 多项式以及幂函数构建的单输入三层前向神经网络，也同样适用于以其他多项式作为网络隐层激励函数的神经网络。

2.3 数值验证

本节中,我们将通过前一节所提出的权值与结构确定算法来确定出利用 Legendre 多项式、Hermite 多项式、第一类 Chebyshev 多项式、第二类 Chebyshev 多项式、Bernoulli 多项式及幂函数作为隐层激励函数所构造的单输入多项式神经网络的最优结构,并利用该结构对给定学习数据进行合理预测,从而通过预测数据比较这几个多项式神经网络的预测能力。本章中,我们将只展示以下三个函数作为目标函数的仿真结果:

$$\gamma = x^2 \sin(3\pi x) + 15, \quad (2.12)$$

$$\gamma = \frac{\cos(3\pi x)e^x}{\sin x + 2} + 20, \quad (2.13)$$

$$\gamma = e^{\sin(\pi x)} + 25. \quad (2.14)$$

另外,需要特别指出的是,计算机仿真与实验的硬件配置为 Intel(R) Pentium(R) 4 CPU(主频 3.00GHz)和 992MB 内存;操作系统为 Windows XP。

考虑到各个多项式的定义域,将以上函数(2.12)-(2.14)中 x 的取值范围统一设定 $[-1,0.6]$,并以间隔 0.001 采样,则可获得相应的学习数据集 $\{\chi_q, \gamma_q\}_{q=1}^{1601}$,也即学习数据总数 $Q=1601$ 。并且,我们统一设定多项式神经网络的预测范围为 $(0.6,1]$,且预测点间隔为 0.0005(即为学习间隔的一半)。

2.3.1 学习能力比较

在研究和比较本章所构造的六种多项式神经网络的预测能力之前,我们先在这一部分对这六种神经网络的学习能力进行比较。首先,我们利用上一节中提到的权值与结构确定算法确定出相应于函数(2.12)-(2.14)的各个多项式神经网络的最优网络结构(即最优神经元数),具体的学习结果,包括学习时间,最优神经元数以及最优学习误差,均已经在表 2.1 中展示,其中, Chebyshev-I 和 Chebyshev-II 分别表示第一类 Chebyshev 多项式和第二类 Chebyshev 多项式。

通过对比表 2.1 中的数据,我们可以发现,在本章所构造的六种多项式神经网络中, Hermite 多项式神经网络以及 Bernoulli 多项式神经网络的学习时间相对较短,最优神经元数也相对较少,而其相应的最优学习误差却相应较大;而其他四种多项式神经网络的学习时间,最优神经元数以及最优学习误差都比较接近,并且,其他四种神

表 2.1 六种多项式神经网络对目标函数(2.12)-(2.14)的学习结果

| | 网络隐层激励函数 | 学习时间(s) | 最优神经元数 | 最优学习误差 |
|--------|--------------|----------|--------|--------------------------|
| (2.12) | Legendre | 0.11956 | 22 | 8.8205×10^{-16} |
| | Hermite | 0.067223 | 15 | 1.1156×10^{-5} |
| | Chebyshev-I | 0.13928 | 21 | 1.3372×10^{-15} |
| | Chebyshev-II | 0.14376 | 22 | 2.0007×10^{-16} |
| | Bernoulli | 0.050453 | 13 | 3.8108×10^{-6} |
| | 幂函数 | 0.142 | 21 | 5.8051×10^{-15} |
| (2.13) | Legendre | 0.09823 | 21 | 1.8475×10^{-16} |
| | Hermite | 0.043337 | 14 | 3.1738×10^{-6} |
| | Chebyshev-I | 0.11171 | 20 | 3.6245×10^{-16} |
| | Chebyshev-II | 0.10474 | 21 | 4.9407×10^{-17} |
| | Bernoulli | 0.056991 | 14 | 7.5882×10^{-8} |
| | 幂函数 | 0.13244 | 20 | 1.0039×10^{-15} |
| (2.14) | Legendre | 0.097464 | 21 | 5.2454×10^{-16} |
| | Hermite | 0.029336 | 12 | 1.1204×10^{-8} |
| | Chebyshev-I | 0.10266 | 21 | 1.5937×10^{-15} |
| | Chebyshev-II | 0.11167 | 21 | 6.0244×10^{-16} |
| | Bernoulli | 0.055466 | 14 | 5.15×10^{-9} |
| | 幂函数 | 0.12111 | 21 | 4.4561×10^{-16} |

神经网络的学习误差也远优于 Hermite 多项式神经网络以及 Bernoulli 多项式神经网络的学习误差。

2.3.2 预测能力比较

在对一系列单输入函数的学习从而确定的相应多项式神经网络最优结构之后，我们将预测目标点集作为网络输入，进而得到相应函数的预测结果。对预测结果的进一步分析，我们发现网络的预测能力会随着预测点的不同位置而不同，具体来说，预测点的预测效果会随着其与学习区间的距离的增大而增大。因此，在本章中，我们将进一步把前述的预测范围(0.6,1]细分为四个子区间，分别是(0.6,0.7]，(0.7,0.8]，(0.8,0.9]和(0.9,1]。然后，我们用公式(2.11)分别计算上述函数(2.12)-(2.14)在四个子区间内预测均方误差(简称预测误差) E_{pred} ，具体数据如表 2.2 所示。

表 2.2. 六种多项式神经网络对目标函数 (2.12)–(2.14) 的预测结果

| 网络隐层 | | (0.6,0.7] | (0.7,0.8] | (0.8,0.9] | (0.9,1] |
|--------------------------------|--------------|---------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 激励函数 | | 预测误差 E_{pred1} | 预测误差 E_{pred2} | 预测误差 E_{pred3} | 预测误差 E_{pred4} |
| 目 标 函 数 (2.12) | Legendre | 4.2237×10^{-8} | 3.1051×10^{-4} | 0.2345 | 53.3321 |
| | Hermite | 0.31384 | 33.816 | 1005.8324 | 14948.7948 |
| | Chebyshev-I | 1.9334×10^{-8} | 4.6162×10^{-5} | 1.0373×10^{-2} | 0.43312 |
| | Chebyshev-II | 4.2243×10^{-8} | 3.1051×10^{-4} | 0.2345 | 53.3321 |
| | Bernoulli | 1.1305×10^{-2} | 0.46267 | 0.9175 | 300.1336 |
| | 幂函数 | 1.9335×10^{-8} | 4.6162×10^{-5} | 1.0373×10^{-2} | 0.43312 |
| 目 标 函 数 (2.13) | Legendre | 3.1465×10^{-9} | 1.8091×10^{-6} | 1.1515×10^{-3} | 0.22934 |
| | Hermite | 1.0988×10^{-2} | 0.65655 | 8.9055 | 34.5161 |
| | Chebyshev-I | 8.0518×10^{-9} | 2.3982×10^{-5} | 9.0677×10^{-3} | 1.1509 |
| | Chebyshev-II | 3.1438×10^{-9} ; | 1.809×10^{-6} | 1.1515×10^{-3} | 0.22934 |
| | Bernoulli | 3.8131×10^{-3} | 0.77035 | 36.8943 | 809.4794 |
| | 幂函数 | 8.0515×10^{-9} | 2.3982×10^{-5} | 9.0677×10^{-3} | 1.1509 |
| 目 标 函 数 (2.14) | Legendre | 1.1378×10^{-8} | 1.4303×10^{-4} | 0.1297 | 30.8332 |
| | Hermite | 8.286×10^{-5} | 2.868×10^{-2} | 1.7407 | 44.1003 |
| | Chebyshev-I | 1.1377×10^{-8} | 1.4303×10^{-4} | 0.1297 | 30.8332 |
| | Chebyshev-II | 1.1381×10^{-8} | 1.4303×10^{-4} | 0.1297 | 30.8332 |
| | Bernoulli | 7.5296×10^{-4} | 0.1556 | 7.7271 | 179.8011 |
| | 幂函数 | 1.1378×10^{-8} | 1.4303×10^{-4} | 0.1297 | 30.8332 |

通过分析表 2.2 中四个区间的预测误差 E_{pred1} 、 E_{pred2} 、 E_{pred3} 和 E_{pred4} ，我们可以进一步验证前述结论，即给定的预测区间与学习区间的距离越大，则其预测误差越大。另外，通过比较不同多项式神经网络对同一函数的预测误差，我们可以得知，Legendre 多项式神经网络与第二类 Chebyshev 多项式神经网络的预测能力较为接近；第一类 Chebyshev 多项式神经网络与幂激励神经网络的预测能力较为接近；而 Hermite 多项式神经网络以及 Bernoulli 多项式神经网络的预测能力较为接近。最后，通过比较表 2.2 中各种神经网络对于不同的目标函数的预测效果，我们还可以进一步总结出，对于 Legendre 多项式神经网络，第一类 Chebyshev 多项式神经网络，第二类 Chebyshev 多项式神经网络以及幂激励神经网络这四种神经网络，当用于预测与给定学习区间比

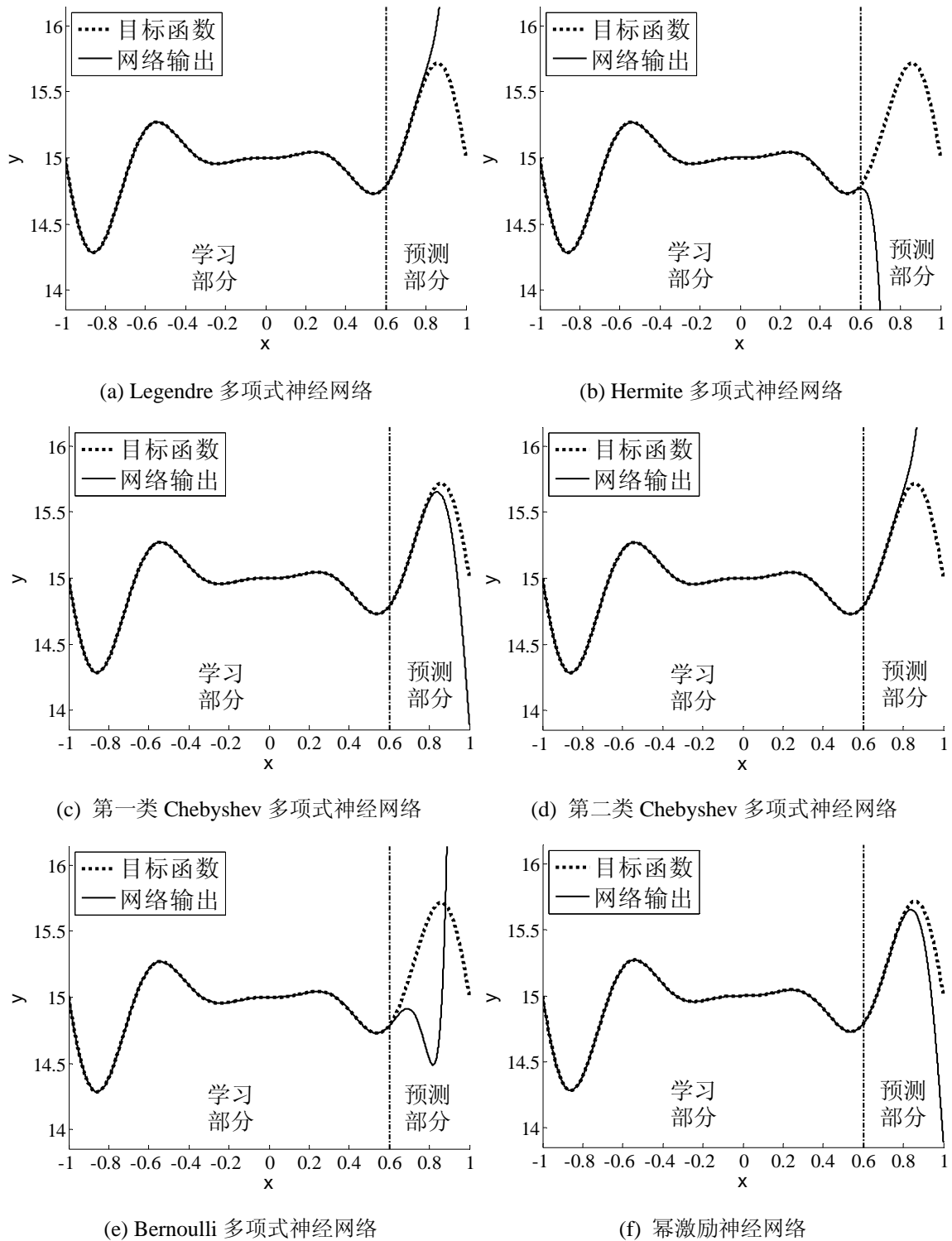
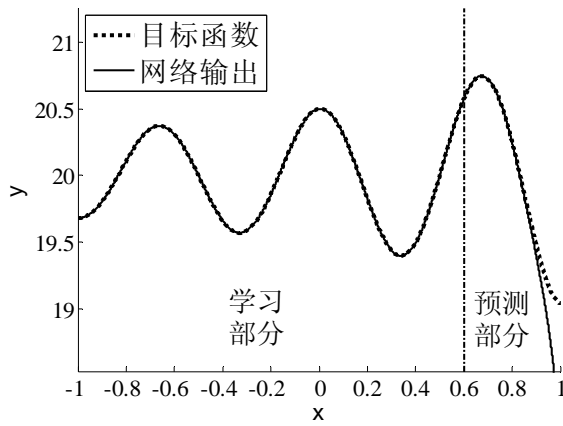
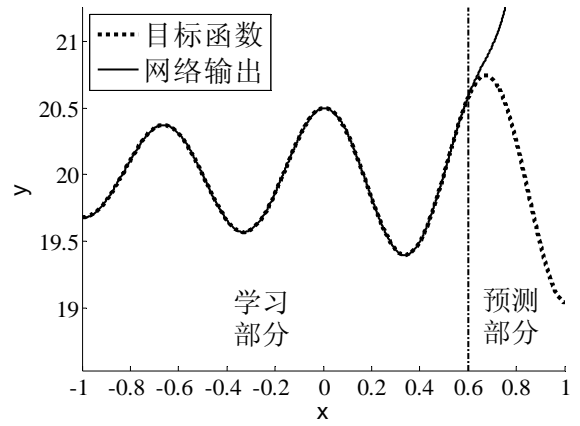


图 2.3 六种多项式神经网络对目标函数(2.12)的学习与预测结果

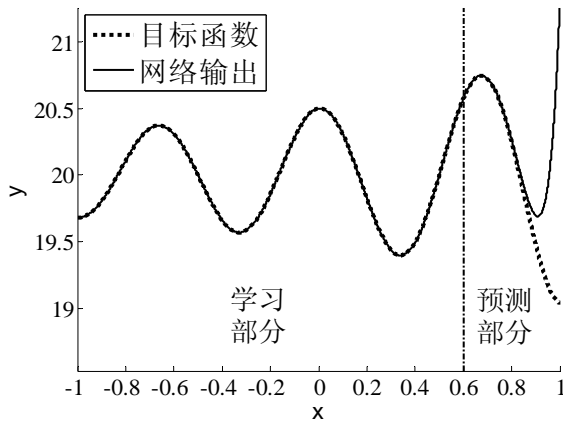
较接近的目标区间时，均具有优异的预测精度。另外，值得指出的是，对于其中的 Hermite 多项式神经网络及 Bernoulli 多项式神经网络，其预测性能一般都不如其他四种神经网络的性能那么优越，但当同样用于预测与给定学习区间比较接近的目标区间



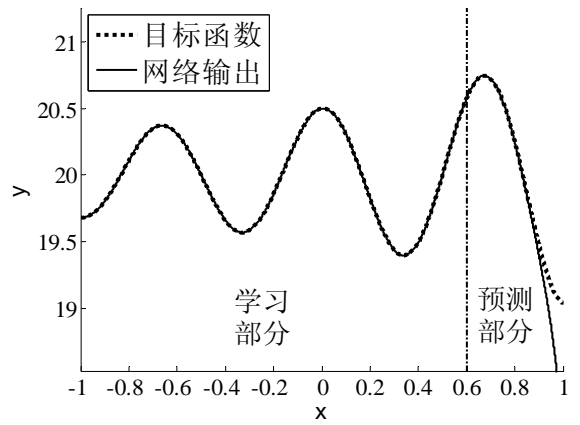
(a) Legendre 多项式神经网络



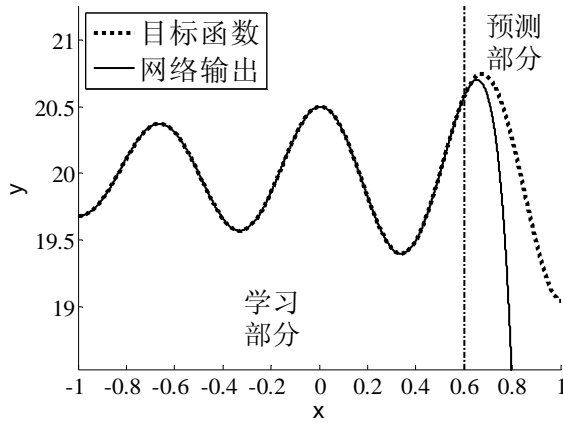
(b) Hermite 多项式神经网络



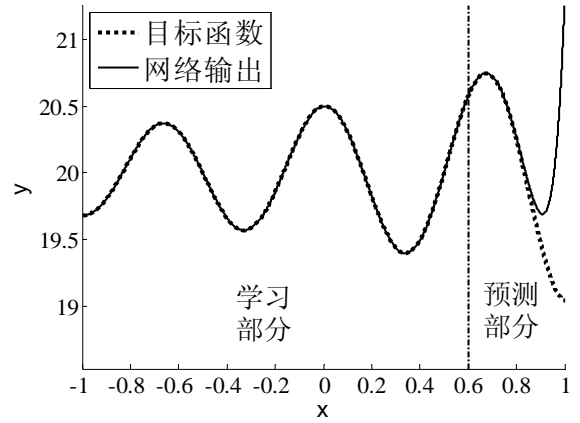
(c) 第一类 Chebyshev 多项式神经网络



(d) 第二类 Chebyshev 多项式神经网络



(e) Bernoulli 多项式神经网络



(f) 幂激励神经网络

图 2.4 六种多项式神经网络对目标函数(2.13)的学习与预测结果

时，其预测误差也相对较小。

最后，通过图 2.3 和图 2.4，我们更清晰直观地展示了各个多项式神经网络的学习

习和预测结果。其中实线为目标函数；虚线为网络的学习和预测效果； $x = 0.6$ 处的虚线左边为学习区域，其右侧为预测区域。根据图中六种多项式神经网络的学习和预测结果，我们可以更为直观地得到以上结论。另外，我们也可以直观地发现，相比于图 2.3 和图 2.4 中的其他结果，虽然在学习部分，图 2.3(b)(e)和图 2.4(b)(e)中所展示的 Hermite 多项式神经网络及 Bernoulli 多项式神经网络同样能够较好地逼近给定的目标函数，但在预测部分，该网络的预测曲线仅有一小部分与目标函数的输出数据比较接近，大部分的预测曲线与目标函数的输出数据间的差距较大，即该网络基本不适合用于预测。

2.4 本章小结

本文以 Legendre 多项式、Hermite 多项式、第一类 Chebyshev 多项式、第二类 Chebyshev 多项式、Bernoulli 多项式以及幂函数作为多项式神经网络的隐层激励函数构造了六种单输入神经网络，并设计了一个增长型的权值与结构确定算法来确定这六种神经网络在学习给定目标函数时的最优结构。利用已确定的最优结构，我们比较了这六种网络在学习和预测能力方面的差异。数值验证结果表明，所构造的六种神经网络均有学习时间短、学习效果优异以及一定的预测能力的特点。其中，以 Legendre 多项式，第一类 Chebyshev 多项式，第二类 Chebyshev 多项式以及幂函数所构造的四种神经网络，在学习和预测能力方面，不存在较大的差别，并且当用于预测与给定学习区间比较接近的目标区间时，均具有优异的预测精度。而相比与这四种神经网络，以 Hermite 多项式及 Bernoulli 多项式构造的神经网络仅具有较一般的学习能力并且基本不适合用于预测。

第三章 二输入 Legendre 正交基神经网络

在前一章中，六种单输入多项式神经网络被提出，并通过设计一种适用于该六种多项式神经网络的权值直接确定法，从而探讨比较了它们在学习和预测方面的性能。然而，现实应用中的系统多为多输入系统，单输入神经网络无法适应该需求。此外，现有的多输入神经网络多数是基于 BP (Back Propagation) 算法的，而如前言所述，传统的 BP 的算法具有一些固有的缺点。因而，提出一种新型的多输入正交基神经网络以及相应的权值与结构确定算法将具有十分重要的意义。

在本章中，我们将利用 Legendre 正交多项式作为网络的隐层激励函数，从而提出相应的二输入 Legendre 正交基神经网络。此外，基于以往的经验[13-20]，我们可以总结出神经元数目会极大地影响神经网络的性能，具体来说，太少的神经元将难以达到期望的学习精度，而太多的神经元将导致结构复杂度以及计算复杂度的增加，甚至导致过拟合现象的出现。因此，本章将进一步研究二输入 Legendre 正交基神经网络的神经元数目以及其学习精度之间的关系，从而提出两种增长速度不同的权值与结构确定算法用来自动确定该类型神经网络的最优结构。最后，我们将通过数值实验验证并比较两种算法的有效性，同时，探讨该网络在学习、泛化和预测的性能。

3.1 理论基础

在构造二输入 Legendre 正交基神经网络之前，我们先给出如下的理论基础以及理论分析。首先，我们重新给出 Legendre 正交多项式的递推关系式：

$$\varphi_{k+2}(x) = \frac{2k+1}{k+1}x\varphi_{k+1}(x) - \frac{k}{k+1}\varphi_k(x), k=1,2,\dots, \quad (3.1)$$

其中 $\varphi_1(x)=1$ ， $\varphi_2(x)=x$ ，且 x 的定义域为 $[-1,1]$ 。

另外，基于多元函数逼近理论^[24,25]，我们可以得到以下引理。

引理 1 对于两个连续独立变量 x_1 和 x_2 ，给定连续目标函数 $F(x_1, x_2)$ ，存在多项式 $g_k(x_1)$ 和 $h_k(x_2)$ ($k=1,2,3,\dots$) 使得

$$F(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x_1)h_k(x_2)。 \quad (3.2)$$

表 3.1 在两种限制法则下，不同 i 值对应的网络结构

| i | 限制法则 I | | 限制法则 II | |
|-----|----------------------------|-----|----------------------------|-----|
| | $[N_1 N_2 \cdots N_{i-1}]$ | K | $[N_1 N_2 \cdots N_{i-1}]$ | K |
| 2 | [1] | 1 | [1] | 1 |
| 3 | [2 2] | 4 | [2 1] | 3 |
| 4 | [3 3 3] | 9 | [3 2 1] | 6 |
| 5 | [4 4 4 4] | 16 | [4 3 2 1] | 10 |
| 6 | [5 5 5 5 5] | 25 | [5 4 3 2 1] | 15 |
| 7 | [6 6 6 6 6 6] | 36 | [6 5 4 3 2 1] | 21 |
| 8 | [7 7 7 7 7 7 7] | 49 | [7 6 5 4 3 2 1] | 28 |
| 9 | [8 8 8 8 8 8 8 8] | 64 | [8 7 6 5 4 3 2 1] | 36 |
| 10 | [9 9 9 9 9 9 9 9 9] | 81 | [9 8 7 6 5 4 3 2 1] | 45 |

根据 Legendre 的正交特性以及引理 1 可以发现，在给定的加权的 Legendre 正交多项式的项数足够多的情况下，我们可以在理论上以任意精度逼近任意目标函数。也即，令 $g_k(x_1) = a_m \varphi_m(x_1)$ ， $h_k(x_2) = b_n \varphi_n(x_2)$ ，其中， a_m 和 b_n 分别表示多项式 $\varphi_m(*)$ 和 $\varphi_n(*)$ 的相应权值。则公式(3.1)可以重新表示为：

$$\begin{aligned}
 F(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m \varphi_m(x_1) b_n \varphi_n(x_2) \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{m,n} \varphi_m(x_1) \varphi_n(x_2), \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

其中， $\omega_{m,n} = a_m b_n$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$) 表示 $\varphi_m(x_1) \varphi_n(x_2)$ 的权值。因此，目标函数 $F(x_1, x_2)$ 可以通过有限数目的基函数 $\{\varphi_m(x_1) \varphi_n(x_2)\}$ 以及相应的最优权值 $\{\omega_{m,n}\}$ 来逼近，也即，

$$F(x_1, x_2) \approx \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_m} \omega_{m,n} \varphi_m(x_1) \varphi_n(x_2), \tag{3.4}$$

注意到基函数 $\{\varphi_m(x_1) \varphi_n(x_2)\}$ 可以通过不同的顺序加以排列^[26]，这就意味着 N_m (m 为某一特定值时， n 所能取到的最大值) 可以随着 m ($m = 1, 2, 3, \dots, M$) 的变化而变化。

因此，我们也能通过如下方法逼近目标函数 $F(x_1, x_2)$ ：

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &\approx \sum_{m=1}^M \varphi_m(x_1) \left(\sum_{n=1}^{N_m} \omega_{m,n} \varphi_n(x_2) \right) \\
&= \sum_{k=1}^K w_k \phi_k(x_1, x_2),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中， $K = \sum_{m=1}^M N_m$ 表示用来逼近目标函数 $F(x_1, x_2)$ 的基函数的总数目。另外， $\{w_k = \omega_{m,n}, k=1, 2, 3, \dots, K\}$ 表示 $\{\phi_k(x_1, x_2)\}$ 的一组权值，且 $\phi_k(x_1, x_2) = \phi_k([x_1, x_2]^T) = \varphi_m(x_1)\varphi_n(x_2)$ 。综上所述，令 $k = \sum_{d=1}^m N_d - N_m + m$ ，我们可以将基函数 $\{\phi_k(x_1, x_2)\}$ 具体表达成式(3.6)的形式：

$$\left\{ \begin{array}{l}
\phi_1(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2), \\
\phi_2(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2), \\
\vdots \\
\phi_{N_1}(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_{N_1}(x_2), \\
\phi_{N_1+1}(x_1, x_2) = \varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2), \\
\vdots \\
\phi_{N_1+N_2}(x_1, x_2) = \varphi_2(x_1)\varphi_{N_2}(x_2), \\
\vdots \\
\phi_k(x_1, x_2) = \varphi_m(x_1)\varphi_n(x_2), \\
\vdots \\
\phi_K(x_1, x_2) = \varphi_M(x_1)\varphi_{N_M}(x_2).
\end{array} \right. \tag{3.6}$$

就如前面所提到的，用来逼近目标函数 $F(x_1, x_2)$ 的基函数可以通过不同的顺序进行排列。为了便于理解，我们在这里介绍两种典型的排列方式，并通过一个给定的正整数 $i (i > 2)$ 将其分别表示为如下的限制法则：

限制法则 I $M = i-1$ 且 $N_m = i-1, m = 1, 2, 3, \dots, M$ ；

限制法则 II $M = i-1$ 且 $N_m = i-m, m = 1, 2, 3, \dots, M$ 。

因此，假如采用限制法则 I，则基函数的总数目 K 可以表示为 $K = i^2$ ；假如采用限制法则 II，则基函数的总数目 K 可以表示为 $K = i(i-1)/2$ 。为了更加清晰地展示这两种限制法则所对应的排序方式，我们将在此将以表格形式给出当 $i = 2, 3, \dots, 10$ 时，采用这两种限制法则排序所产生的 N_m 和 K 的值，如表 3.1 所示。

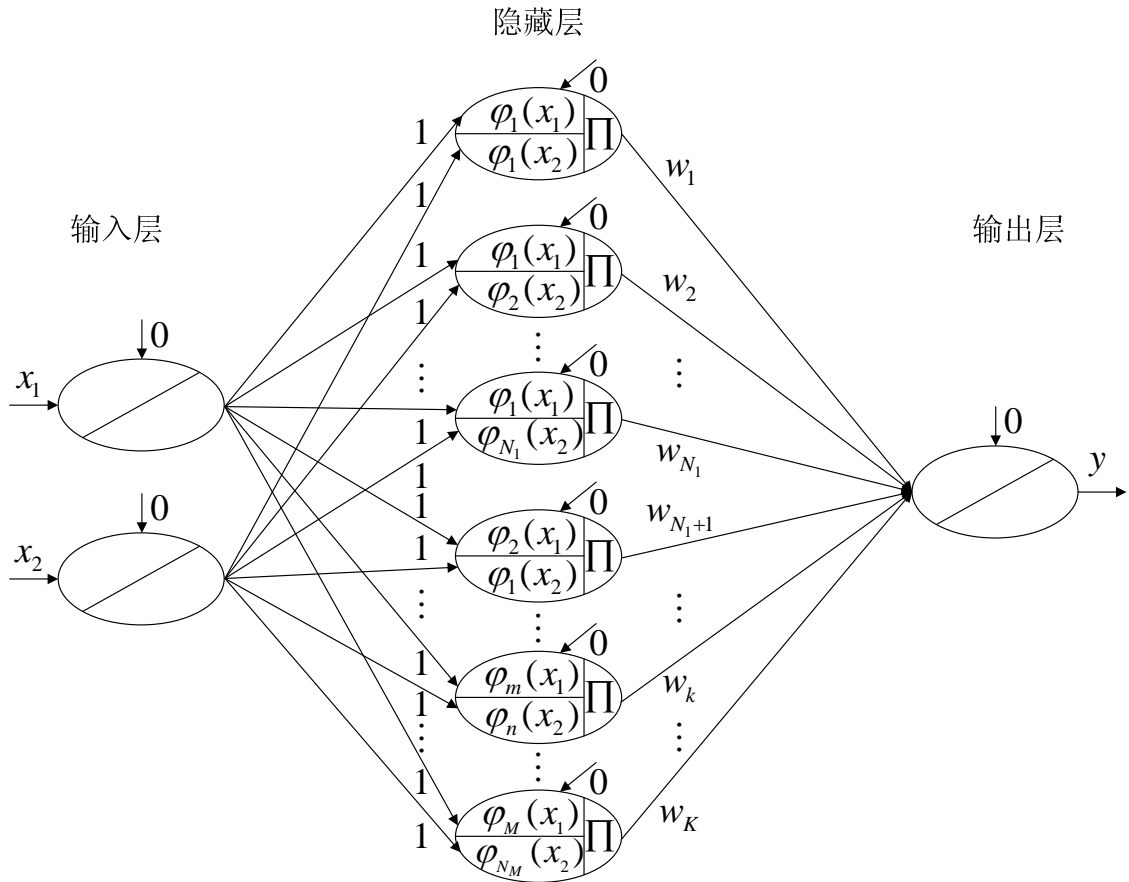


图 3.1 二输入 Legendre 正交基神经网络结构

3.2 网络模型与算法

根据上一节的理论基础及理论分析，我们将在本节中构建一种新型的二输入 Legendre 正交基神经网络。然后，基于单输入的权值与结构确定算法，我们将根据上一节提到的两种限制法则提出两种不同增长速度的权值与结构确定算法，从而进一步提高该二输入 Legendre 正交基神经网络的综合性能。

3.2.1 网络模型

本文所提出的二输入 Legendre 正交基神经网络具体如图 3.1 所示。从图中我们可以看到，该网络为三层前向神经网络。其中，输入层神经元和输出层神经元均由相同的线性函数所激励的；隐藏层的 $K(K = \sum_{m=1}^M N_m)$ 个神经元是由一组由公式 (3.6) 所展示的基函数所激励的。另外， $w_k (k = 1, 2, 3, \dots, K)$ 分别表示从隐藏层各个神经元到输出层之间的权值。为了简化结构以及降低计算复杂度，我们将输入层到隐藏层各个

神经元之间的权值均设为 1，同时，将所有神经元的阈值均设为 0。

3.2.2 权值直接确定法

由以往用于确定单输入神经网络权值的权值直接确定法^[13-20]，我们可以推广得到适用于二输入网络权值直接确定法，从而一步确定图 3.1 所示的二输入 Legendre 正交基神经网络中连接隐层神经元以及输出层神经元的最优权值。

令 $\{\boldsymbol{x}_q, \gamma_q\}_{q=1}^Q$ 表示作为训练样本的数据对，其中 $\boldsymbol{x}_q \in \mathbb{R}^2$ 表示第 q 个输入向量 $[\boldsymbol{x}_{1q}, \boldsymbol{x}_{2q}]^T$ ， γ_q 为相应于 \boldsymbol{x}_q 的期望输出， Q 为样本数据对总数。则我们可以将均方误差 (MSE) 表示如下：

$$E = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \left(\gamma_q - \sum_{k=1}^K w_k \phi_k(\boldsymbol{x}_q) \right)^2. \quad (3.7)$$

因此，我们通过最小二乘法最小化均方误差可以得到以下适用于二输入神经网络的权值直接确定法：

定理 2 图 3.1 所示的二输入 Legendre 正交基神经网络中隐层与输出层的最优权值可以直接确定为

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\gamma}. \quad (3.8)$$

其中，权值列向量 \boldsymbol{w} ，输入激励矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ ，目标输出列向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 分别定义为

$$\boldsymbol{w} := [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_k \ \cdots \ w_K]^T \in \mathbb{R}^K, \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{X} := \begin{bmatrix} \phi_1(\boldsymbol{x}_1) & \phi_2(\boldsymbol{x}_1) & \cdots & \phi_K(\boldsymbol{x}_1) \\ \phi_1(\boldsymbol{x}_2) & \phi_2(\boldsymbol{x}_2) & \cdots & \phi_K(\boldsymbol{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\boldsymbol{x}_Q) & \phi_2(\boldsymbol{x}_Q) & \cdots & \phi_K(\boldsymbol{x}_Q) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Q \times K}, \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\gamma} := [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \cdots \ \gamma_q \ \cdots \ \gamma_Q]^T \in \mathbb{R}^Q. \quad (3.11)$$

上式中， K 为给定的隐层神经元数目， Q 为给定的总的学习数据量。值得指出的是，式(1)中 $(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\gamma}$ 为输入激励矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的伪逆，可用 MATLAB 中的 `pinv($\boldsymbol{\Phi}$)` 命令求得，因此(1)也可以简写为 $\boldsymbol{w} = \text{pinv}(\boldsymbol{\Phi}) \boldsymbol{\gamma}$ 。

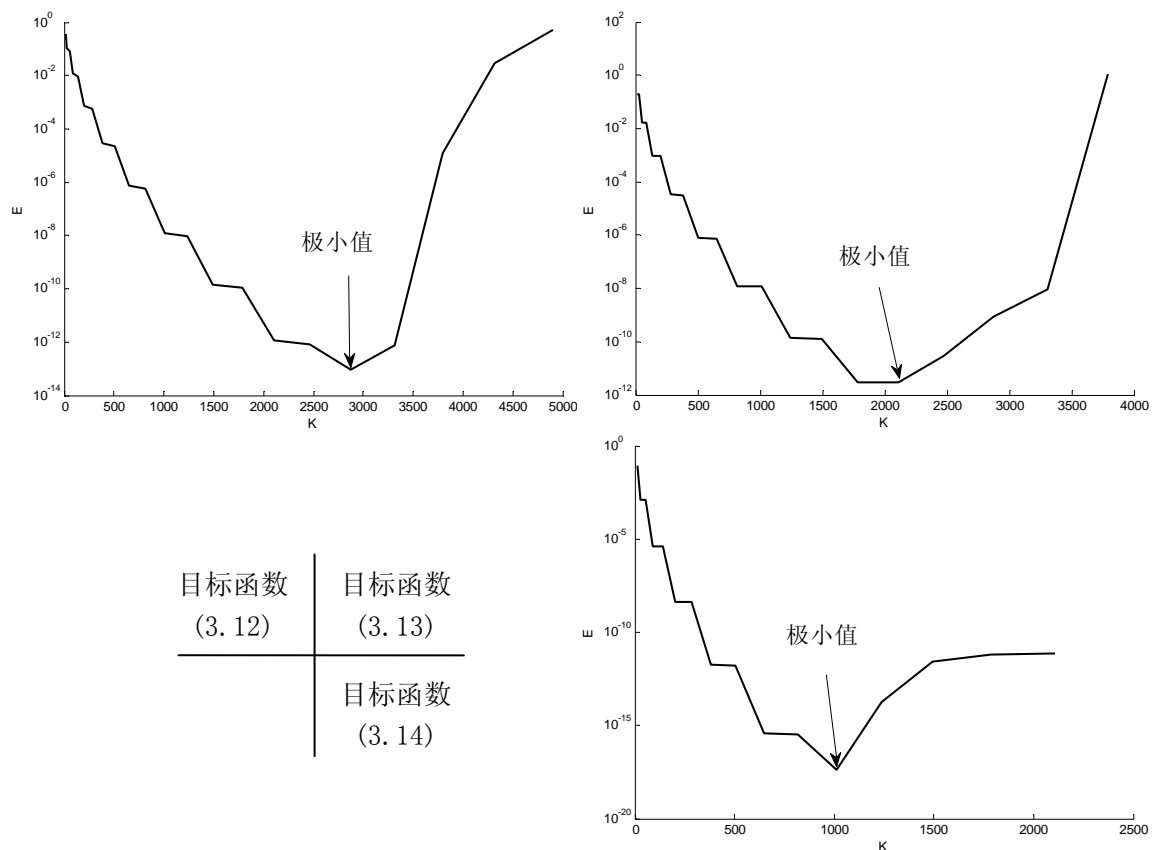


图 3.2 针对不同目标函数，Legendre 神经网络在限制法则 I 下的学习误差与神经元数的关系图

3.2.3 两种不同增长速度的权值与结构确定算法

由以往的工作中[13-20]，我们可以知道，神经元数目会极大地影响神经网络的性能。因此，为了获得所提出的二输入 Legendre 正交基神经网络最优的神经元数目（以及最优的权值），我们提出了两种不同增长速度的权值与结构确定算法，并将在下一节中通过数值实验进一步对这两种算法进行研究和比较。

在给出具体的权值与结构确定算法之前，我们对大量的目标函数进行了实验，从而研究考察二输入 Legendre 正交基神经网络在学习这些函数时的均方误差 E 以及网络神经元数目之间的关系。为了更好地说明问题，我们将在接下来的内容中对以下三个目标函数进行研究并展示其结果：

$$F(x_1, x_2) = 10\sin(x_1)e^{-(2x_1)^2 - (2x_2)^2}, \quad (3.12)$$

$$F(x_1, x_2) = 4e^{-x_1^2 - (2x_2)^2} + 10, \quad (3.13)$$

$$F(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1 x_2) + 20. \quad (3.14)$$

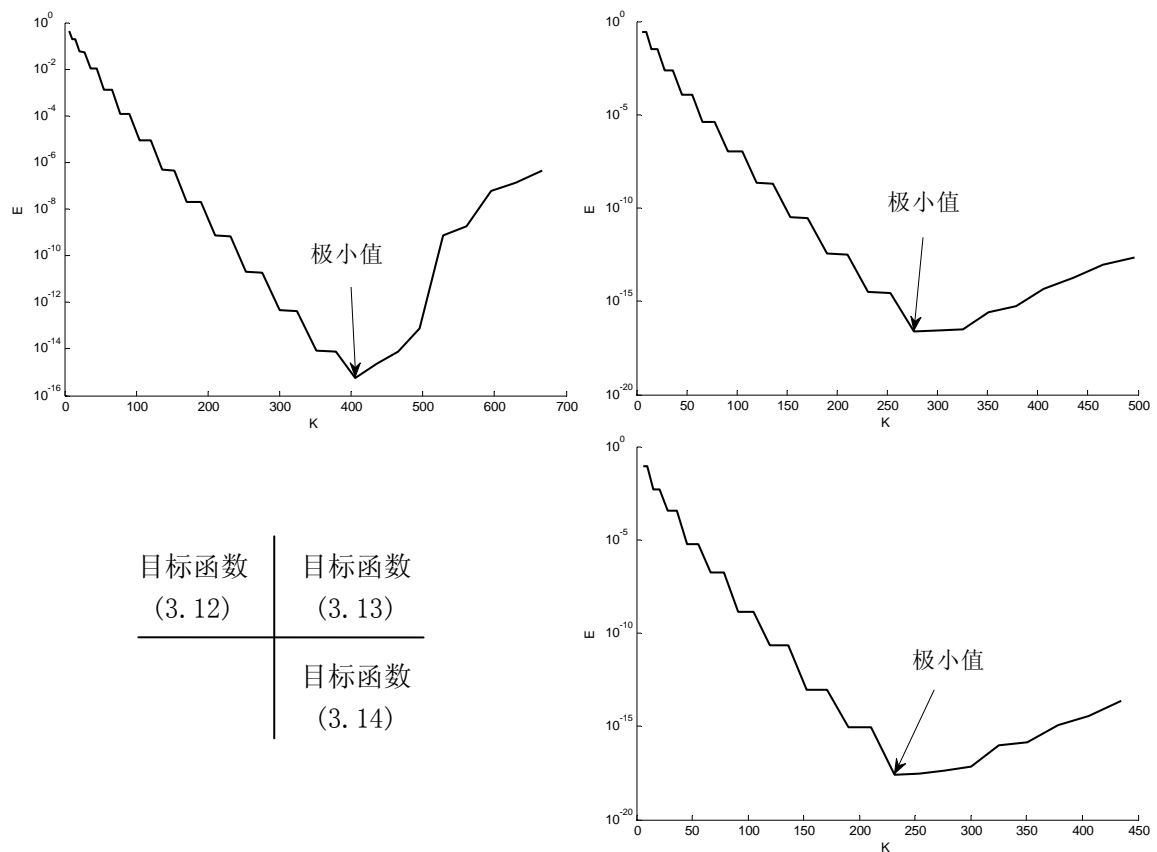


图 3.3 针对不同目标函数，Legendre 神经网络在限制法则 II 下的学习误差与神经元数的关系图

二输入 Legendre 正交基神经网络在学习以上三个目标函数过程中的均方误差 E 以及网络神经元数目的关系图具体如图 3.2 和图 3.3 所示，值得指出的是，图 3.2 和图 3.3 所展示的神经元增长过程分别对应于前面所提到的限制法则 I 和限制法则 II。

由于这些图在形状上都类似与英文字母中的 U 或 V，即神经网络的学习均方误差 E 先随着神经元数目的增加而减少，当到达一定的神经元数目后，神经网络的学习均方误差 E 又随着神经元数目的增加而增加，我们将该类图形统称为 UV 图。正因为神经网络的学习均方误差 E 与神经元数目之间存在这样的关系，这些 UV 图也都因此存在全局的极小值点。值得补充说明的是，所提出的二输入网络在学习其他目标函数的过程中也都拥有以上特点，由于实验结果的类似，我们就没有将所有结果均予以展示。

因此，根据以上发现，我们可以根据前面所提到的两种限制法则设计两种相应的权值与结构确定算法，从而以不同的神经元增长速度确定二输入 Legendre 正交基神经网络的最优的神经元数目，或者说，最优网络结构。为了便于理解，我们将这两种

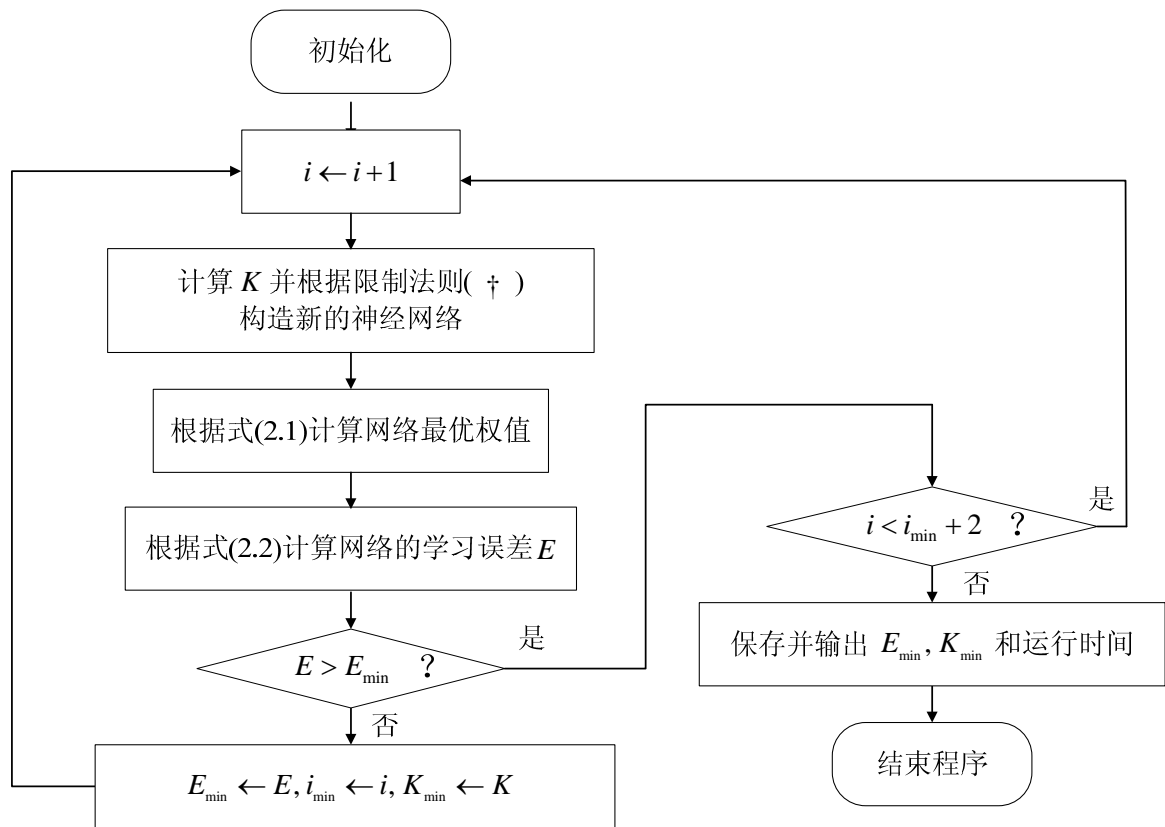


图 3.4 二输入 Legendre 神经网络的权值与结构确定算法流程图

权值与结构确定算法用流程图（如图 3.4）表现出来。值得指出的是，这两种算法唯一的区别就是采用了不同的限制法则。因此，在图 3.4 所示的流程图中，我们将限制法则标记为(†)以表示可以选择限制法则 I 或限制法则 II。此外，我们将算法流程作如下更详细说明：

- E ：当前网络的均方误差；
- E_{\min} ：当前找到的最小均方误差；
- i ：限制法则中用于构造当前神经网络的正整数；
- i_{\min} ：当前找到的最优网络隐结构所对应的限制法则中的正整数。
- K ：当前网络的隐层神经元数目；
- K_{\min} ：当前找到的最优网络隐层神经元数目。

步骤 1 获得学习数据 $\{\chi_q, \gamma_q\}_{q=1}^Q$ 。令 $i \leftarrow 2$, $i_{\min} \leftarrow 2$ 并根据相应多项式初始化神经网络结构。令 E_{\min} 足够大（如 $E_{\min} \leftarrow 10$ ）。然后进入步骤 2；

步骤 2 令 $i \leftarrow i+1$ ，假如(†)采用的是限制法则 I，则通过 $K = i^2$ 计算 K ；否则[当(†)采用的是限制法则 II]，则通过 $K = i(i-1)/2$ 计算 K 。根据所采用的限制法则及正整数 i 构造神经网络。然后进入步骤 3；

步骤 3 根据重新构建的神经网络结构，利用权值直接确定法(3.8)计算隐层和输出层的连接权值，再根据式(3.7)计算均方误差 E ，然后进入步骤 4；

步骤 4 比较 E 和 E_{\min} 的大小，若 $E > E_{\min}$ ，则进入步骤 5；否则，令 $E_{\min} \leftarrow E$ ， $i_{\min} \leftarrow i$ ， $K_{\min} \leftarrow K$ ，然后返回步骤 2；

步骤 5 比较 i 和 $i_{\min} + 2$ 的大小，若 $i < i_{\min} + 2$ ，则返回步骤 2；否则，进入步骤 6；

步骤 6 保存并输出最优神经元数目 K_{\min} ，最小均方误差 E_{\min} 以及运行时间，结束程序。

3.3 数值实验结果

本节中，我们将通过数值实验对所提出两种不同增长速度的权值与结构确定算法进行验证，并通过算法具体研究二输入 Legendre 正交基神经网络在学习、泛化和预测三方面的性能。

首先，考虑到 Legendre 多项式的定义域，我们统一在区间 $[-1,1]^2$ 上以间隔 0.06 进行采样并将其作为上述目标函数(3.12)-(3.14)的输入，进而获得神经网络的学习数据 $\{\chi_q, \gamma_q\}_{q=1}^{1156}$ （即学习数据总数 $Q=1156$ ）。接下来，通过两种权值与结构确定算法分别确定出二输入 Legendre 正交基神经网络在学习目标函数(3.12)-(3.14)的最优网络结构及相应的最优权值。此外，为了进行验证神经网络的泛化能力，我们重新对区间 $[-1,1]^2$ 以间隔 0.029 进行采样，并生成相应的输入输出数据 $\{\chi_q, \gamma_q\}_{q=1}^{4761}$ 。作为实验结果，我们将最优神经元数目，逼近误差，校验误差具体记录在表 3.2 中。对表 3.2 的分析，我们可以总结出以下四点：

1) 通过比较表 3.2 中的最优神经元数 K_{\min} 以及图 3.2、图 3.3 各曲线中的最小值，二输入 Legendre 正交基神经网络在学习各个上述各个目标函数时，两种权值结构确定算法均能成功地确定出最优神经元数 K_{\min} ，即所确定的神经网络的学习误差为全局

表 3.2 二输入 Legendre 正交基神经网络对目标函数(3.12)-(3.14)的学习结果

| | 目标函数 | 最优神经元数 K_{\min} | 最优学习误差 E_{approx} | 校验误差 E_{test} | 学习时间(s) |
|-----------|-------|-------------------|----------------------------|-------------------------|---------|
| 限制 | (3.5) | 2869 | 9.240×10^{-14} | 6.606×10^{-13} | 326.935 |
| 法则 | (3.6) | 2108 | 2.934×10^{-12} | 6.726×10^{-12} | 211.585 |
| I | (3.7) | 1014 | 4.194×10^{-18} | 2.403×10^{-18} | 73.346 |
| 限制 | (3.5) | 406 | 5.937×10^{-16} | 9.928×10^{-16} | 13.731 |
| 法则 | (3.6) | 276 | 2.454×10^{-17} | 8.715×10^{-16} | 5.309 |
| II | (3.7) | 231 | 2.645×10^{-18} | 2.926×10^{-18} | 3.570 |

极小值。

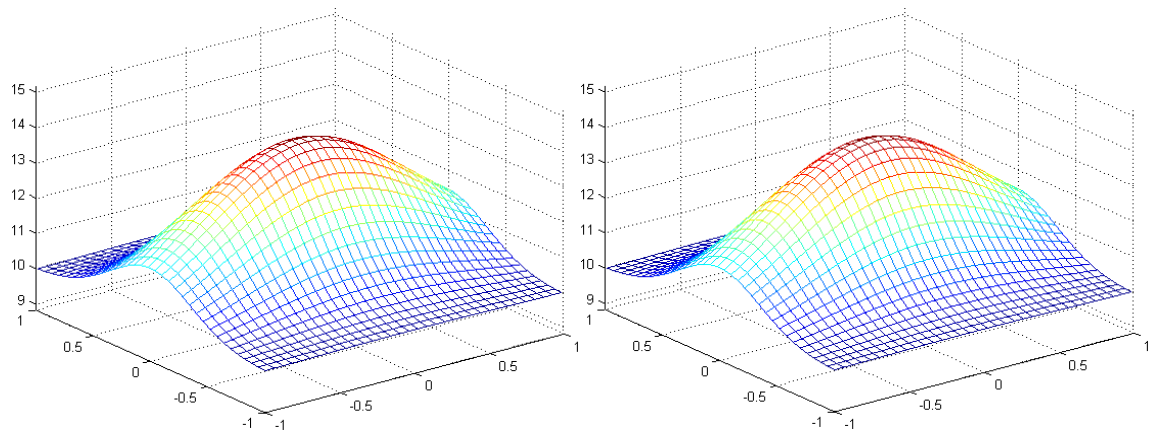
2) 表 3 中的学习误差 E_{approx} 和校验误差 E_{test} 均极小, 数量级为 $10^{-12} \sim 10^{-18}$, 这反映了所提出的二输入 Legendre 正交基神经网络具有极强的学习能力和泛化能力。

3) 两种权值与结构确定算法都能比较快速有效地确定出最优网络结构。但相比较而言, 采用限制法则 II 的算法所需要的学习时间远远小于采用限制法则 I 的算法所需要的学习时间。

4) 相对于采用限制法则 I 的算法, 采用限制法则 II 的算法所确定的最优神经元数较少, 同时, 能达到较高的学习精度。

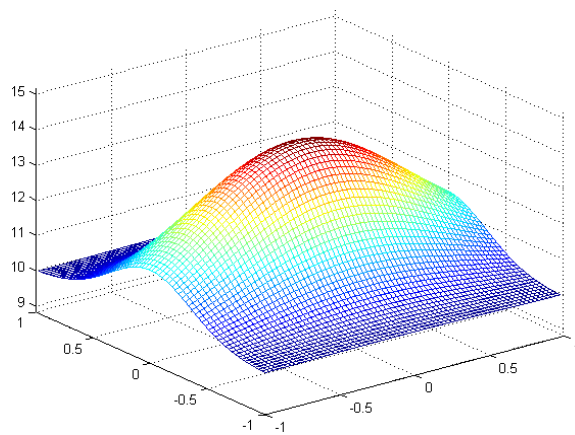
为了更清晰地展示学习结果, 对于目标函数(3.13), 我们把通过两种权值与结构确定算法所确定的二输入 Legendre 正交基神经网络在最优网络结构下的学习和校验结果展示在图 3.5 中。值得指出的是, 由于网络的学习误差及校验误差非常小, 即从综合两种算法的学习结果, 我们可以推出目标输入输出关系图, 因此, 我们没有单独将目标函数的原图在本文中予以展示; 类似地, 在接下来的预测结果中, 将不会出现目标函数的原图的展示。从图 3.5, 我们可以进一步验证以上四点结论。

为了进一步地分析研究, 我们在区间 $[-0.9, 0.9]^2$ 上以间隔 0.06 进行采样并将其作为上述目标函数(3.14)的输入, 进而获得神经网络的学习数据 $\{\chi_q, \gamma_q\}_{q=1}^{961}$ (即学习数据总数 $Q=961$)。基于这些数据, 我们将通过二输入 Legendre 正交基神经网络预测目标函数(3.7)在区间 $\{[-1, 1]^2 - [-0.9, 0.9]^2\}$ 的输出。具体的学习、校验和预测结果如图 3.6 所示。由图 3.6 分析可得, 对于不同的目标函数, 通过本文提出的两种不同增长速度的权值与结构确定算法中任意一种, 我们均能确定出拥有优越的学习性能和预测性能的

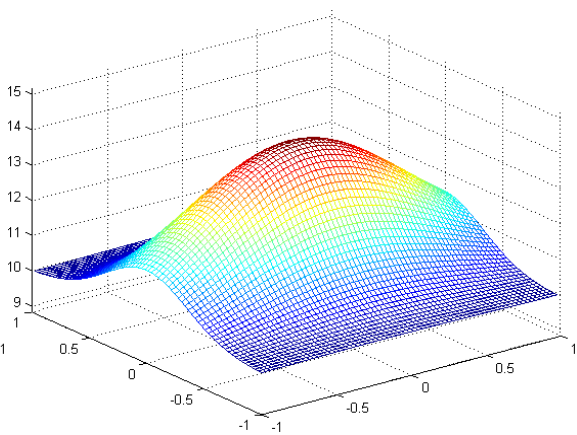


(a) 采用限制法则 I 的学习结果

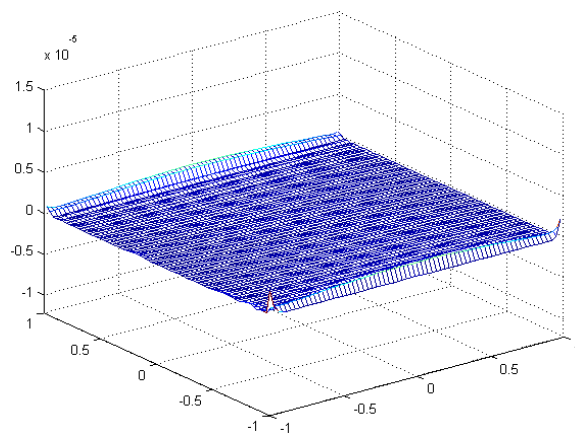
(b) 采用限制法则 II 的学习结果



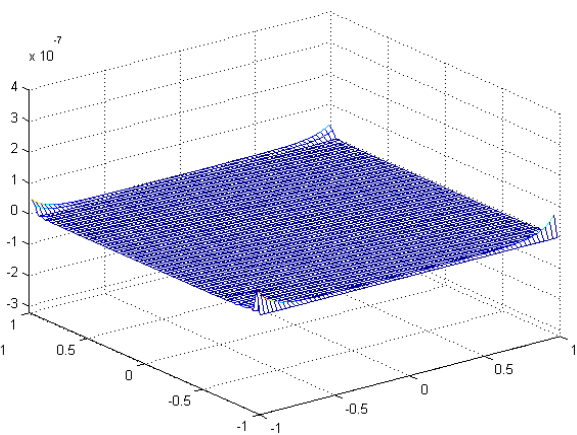
(c) 采用限制法则 I 的校验结果



(d) 采用限制法则 II 的校验结果



(e) 采用限制法则 I 的校验误差

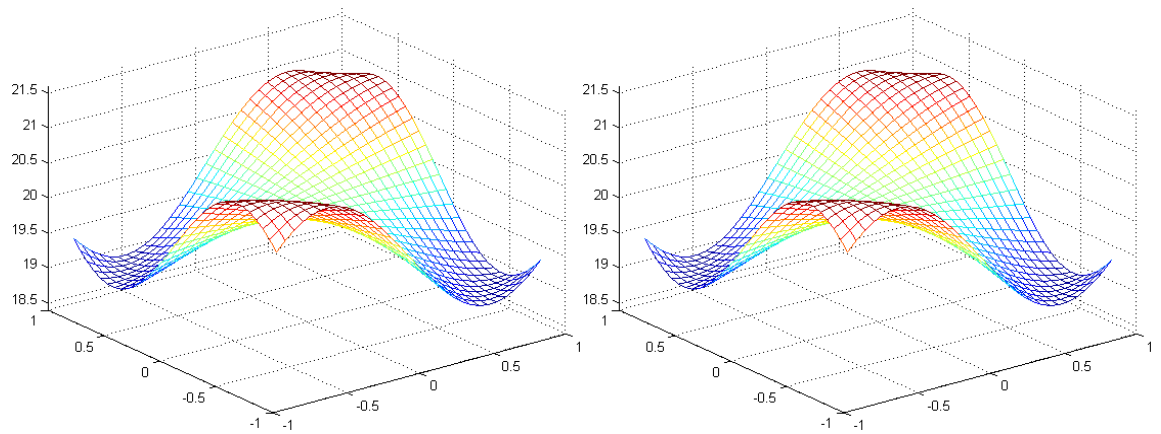


(f) 采用限制法则 II 的校验误差

图 3.5 二输入 Legendre 神经网络在两种权值与结构确定算法下对式 (3.13) 的实验结果

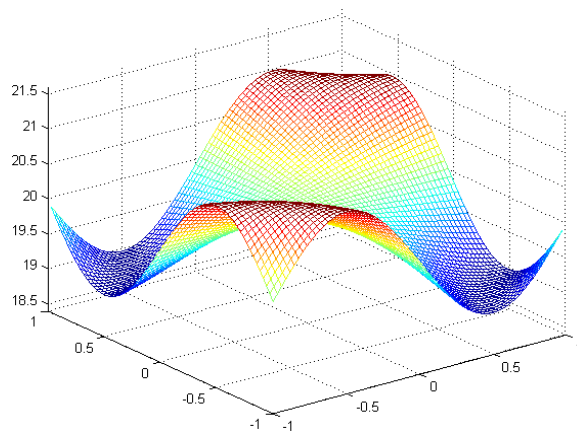
二输入 Legendre 正交基神经网络。

综上所述，在两种不同增长速度的权值与结构确定算法的帮助下，二输入 Legendre 正交基神经网络拥有优越的学习能力、泛化能力以及预测能力。另外，值得

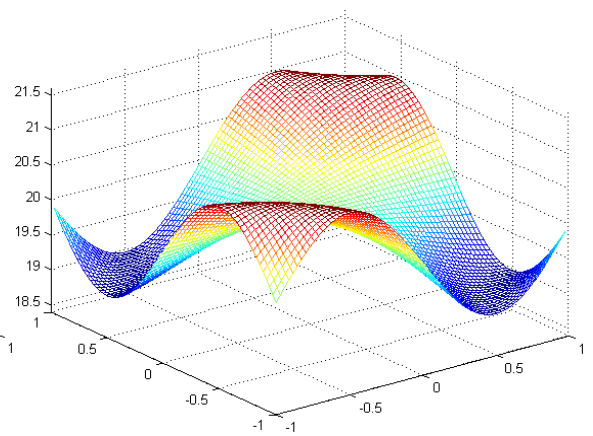


(a) 采用限制法则 I 的学习结果

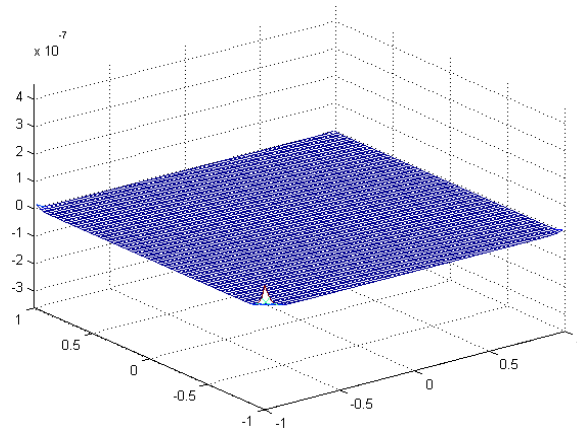
(b) 采用限制法则 II 的学习结果



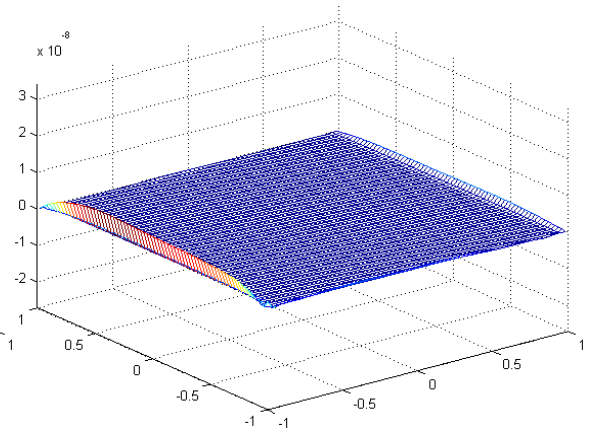
(c) 采用限制法则 I 的预测和校验结果



(d) 采用限制法则 II 的预测和校验结果



(e) 采用限制法则 I 的预测和校验误差



(f) 采用限制法则 II 的预测和校验误差

图 3.6 二输入 Legendre 神经网络在两种权值与结构确定算法下对式 (3.14) 的实验结果

指出的是，相比于采用限制法则 II 的权值与结构确定算法，采用限制法则 I 的权值与结构确定算法能够用更少的运行时间确定出结构更简单而学习能力、泛化能力以及预测能力均更优越的二输入 Legendre 正交基神经网络。

3.4 本章小结

在本章中，我们提出了一种新型的二输入 Legendre 正交基神经网络，这为我们进一步研究多输入神经网络奠定了坚实的基础。另外，为了能自动准确的确定出该二输入网络的最优神经元数目以及相应的最优权值，我们基于上一章提出的单输入神经网络的权值与结构确定算法，采用了不同的限制法则设计了两种不同增长速度的权值与结构确定算法。数值实验进一步验证了在两种不同增长速度的权值与结构确定算法的帮助下，我们所提出的二输入 Legendre 正交基神经网络拥有优越的学习能力、泛化能力以及预测能力。

第四章 总结与展望

本文在第一章具体介绍神经网络的研究现况及其不足。在此基础上，针对原有的神经网络结构确定算法需要人为输入期望精度等缺点，第二章设计了一种适用于多类单输入多项式神经网络预测权值与结构确定算法，并通过该算法比较了以 Legendre 多项式、Hermite 多项式、第一类 Chebyshev 多项式、第二类 Chebyshev 多项式、Bernoulli 多项式及幂函数作为隐层激励函数所构造的单输入多项式神经网络的学习能力和预测能力。另外，针对现实系统多为多输入系统，在第三章中，我们建立了一种新型的二输入 Legendre 正交基神经网络，并采用了不同的限制法则设计了两种不同增长速度的权值与结构确定算法从而自动快速确定该网络的最优网络结构和最优权值。数值实验进一步验证在这两种算法的帮助下，我们所提出的二输入 Legendre 正交基神经网络拥有优越的学习能力、泛化能力以及预测能力。在这一章中，我们将对本文的主要工作进行总结分析，并对神经网络的未来研究进行展望。

4.1 总结与分析

针对神经网络原有研究工作中存在的一些不足，本文具体研究了以下六大方面的内容：

一、建立统一化的适用于各种多项式神经网络的增长型权值与结构确定算法，为权值与结构确定算法的统一化奠定了坚实的基础；

二、多类单输入多项式神经网络的学习能力比较；

三、多类单输入多项式神经网络的预测能力比较，为多项式神经网络在数据预测领域中的应用迈出了重要的一步；

四、二输入多项式神经网络的建立，对多输入多项式神经网络的进一步发展具有重大的意义；

五、建立两种增长速度不同的权值与结构确定算法，为能自动确定二输入神经网络最优结构的算法开了先河；

六、二输入多项式神经网络的学习能力及预测能力分析，为多输入多项式神经网络在数据学习和预测领域的进一步发展做出了重要的贡献。

4.2 未来研究展望

关于人工神经网络的研究，我们在后续还可继续研究以下内容：

一、进一步将多项式神经网络跟 BP(Back Propagation)神经网络、RBF(Radial Basis Function)以及 Hopfield 神经网络进行预测能力的比较，最终确定出预测能力最优越的神经网络；

二、将 BP(Back Propagation)神经网络、RBF(Radial Basis Function)以及 Hopfield 神经网络考虑在内，建立一种适用性更加广泛的权值与结构确定算法；

三、进一步研究并优化二输入多项式神经网络的权值与结构确定算法，可从进一步减少神经元数目、减少学习时间等方面进行优化；

四、建立更多输入的多项式神经网络，研究其神经元数目及学习误差是否仍为 UV 图；

五、建立一种统一的权值与结构确定算法，可用于确定（包括输入量不同或者隐层激励函数不同的）各种多输入多项式神经网络的最优结构及最优权值；

六、探索人工神经网络的硬件实现，进一步推动人工神经网络在实际工作中的应用。

参考文献

- [1] 张青贵. 人工神经网络导论 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2004
- [2] 何明一. 神经计算原理·语言·设计·应用 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1992.
- [3] 陈冰梅, 周志明. 人工神经网络的拟人化思维 [J]. 中华医学研究与实践, 2004, 2 (5): 27 - 29
- [4] 高隼. 人工神经网络原理及仿真实例 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2003
- [5] Zhang Y, Tan Z, Chen K, Yang Z, Lv X. Repetitive Motion of Redundant Robots Planned by Three Kinds of Recurrent Neural Networks and Illustrated with a Four-Link Planar Manipulator's Straight-Line Example [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2009, 57 (6-7): 645-651
- [6] 李文生, 解梅, 邓春健, 姚琼. 基于 Hermite 神经网络的动态手势学习和识别 [J]. 计算机工程与科学, 2012, 34 (2): 116-122
- [7] Zhang Y, Ge S S. Design and Analysis of a General Recurrent Neural Network Model for Time-Varying Matrix Inversion [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2005, 16 (6): 1477-1490
- [8] Zhang Y, Tan Z, Yang Z, Lv X. A Dual Neural Network Applied to Drift-Free Resolution of Five-Link Planar Robot Arm [C]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Information and Automation, 2008: 1274-1279
- [9] 郁明, 丛爽. 基于径向基函数神经网络滑模控制的运动控制系统 [J]. 系统仿真学报, 2009, 21 (3): 776-779, 788
- [10] 张雨浓, 陈扬文, 易称福, 李巍. Hermite 正交基前向神经网络的权值直接确定法 [J]. 甘肃科学学报, 2008, 20 (1): 82—86
- [11] Wen J, Zhao J, Luo S, et al. The Improvements of BP Neural Network Learning Algorithm [C]. In: Proceedings of The 5th International Conference on Signal Processing, Beijing, China, 2000
- [12] 张雨浓, 杨逸文, 李巍. 神经网络权值直接确定法[M]. 广州: 中山大学出版社, 2010
- [13] 张雨浓, 旷章辉, 肖秀春, 陈柏桃. Fourier 三角基神经元网络的权值直接确定法 [J]. 计算机工程与科学, 2009, 31 (5): 112-115
- [14] 张雨浓, 钟童科, 李巍, 易称福. Laguerre 正交基前向神经网络及其权值直接确定法 [J]. 暨南大学学报(自然科学版). 2008, 29 (3): 249-253
- [15] 张雨浓, 刘巍, 蔡炳煌, 肖秀春. 权值可直接算出的 Legendre 神经网络之隐节点数自动确定 [J]. 小型微型计算机系统, 2009, 30 (7): 1298-1301
- [16] 张雨浓, 陈扬文, 易称福, 李巍. Hermite 正交基前向神经网络的权值直接确定

- 法 [J]. 甘肃科学学报, 2008, 20 (1): 82—86
- [17] 张雨浓, 陈裕隆, 姜孝华, 曾庆淡, 邹阿金. 一种权值直接确定及结构自适应的 Chebyshev 基函数神经网络 [J]. 计算机科学, 2009, 36 (6): 210-213
- [18] 肖秀春, 张雨浓, 姜孝华, 邹阿金. 第二类 Chebyshev 前向神经网络权值直接确定及结构自适应确定 [J]. 大连海事大学学报(自然科学版), 2009, 35 (1): 80-84
- [19] Zhang Y, Ruan G. Bernoulli Neural Network with Weights Directly Determined and with the Number of Hidden-Layer Neurons Automatically Determined [C]. In: Proceedings of the 6th International Symposium on Neural Networks, 2009: 36-45
- [20] 张雨浓, 肖秀春, 旷章辉. Padé有理式神经网络及其权值直接确定法 [J]. 微电子学与计算机, 2009, 26 (1): 12-15, 20
- [21] 师智斌, 陈立潮, 靳雁霞. 基于神经网络的股票交易数据的预测研究 [J]. 华北工学院学报. 2003, 24 (6): 412-415
- [22] 董超俊, 刘智勇. 多层混沌神经网络及其在交通流量预测中的应用 [J]. 系统仿真学报, 2007, 19 (19): 4450-4453
- [23] 周辉仁, 郑丕谔. 基于递阶遗传算法和 BP 网络的时间序列预测 [J]. 系统仿真学报, 2007, 19 (21): 5055-5058
- [24] 梁学章, 李强. 多元逼近 [M]. 北京: 国防工业出版社. 2005
- [25] 徐利治, 杨家新. 多元函数逼近研究近况述评 [J]. 数学进展, 1987, 16(3): 241-249
- [26] Charles F D, Yuan X. Orthogonal Polynomials of Several Variables [M], Cambridge: Cambridge University Press, 2001

致谢

在大三结束后，我便开始跟着导师张雨浓教授进行人工神经网络方面的研究。在张老师的悉心指导下，再加上实验室极好的研究氛围，让我逐渐步入了学术研究的殿堂。在完成本论文的整个过程中，张老师对我的严格要求培养了我科学严谨的态度，同时，老师又经常在百忙之中抽出宝贵的时间对我进行进度监督和指导。对于这段时间中所完成的学术成果，老师总能逐字逐句进行修改，这种一丝不苟的态度深深地影响着我。在本论文完成之际，我向张老师致以最崇高的敬意和最衷心的感谢。

此外，我还要特别感谢我的父母和姐姐在我生活学习中遇到困难的任何时刻都给我支持和鼓励，是你们让我能够成功完成大学的所有学业，也是你们让我不断有动力去追求我的梦想。

另外，在我科研或学习中遇到挫折困难时，身边还有那么一群鼓励我不要放弃的人。在此，我首先要特别感谢杨冰、陈梓豪、刘捷夫、陈亦新、李全林等好友；其次，我还要感谢劳稳超、殷勇华、余晓填、黎卫兵、张智军等所有同在一个实验室的好友。

感谢 08 自动化的其他朋友们，感谢你们的关心与帮助。

最后，感谢中山大学和信息科学与技术学院对我的培养，也感谢所有关心我、帮助过我的人。

附录 攻读学士学位期间的学术成果

- [1] Zhang Yunong, Chen Jinhao, Guo Dongsheng, Yin Yonghua and Lao Wenchao. Growing-Type Weights and Structure Determination of 2-Input Legendre Orthogonal Polynomial Neuronet [C]. In: Proceedings of 2012 IEEE International Symposium on Industrial Electronics. (已录)
- [2] Zhang Yunong, Li Weibing, Yu Xiaotian, Xiao Lin and Chen Jinhao. The 3-Input Euler Polynomial Neuronet (3IEPN) with Weights-and-Structure-Determination (WASD) Algorithm [C]. In: Proceedings of 4th International Conference on Modelling, Identification and Control. (已录)
- [3] Zhang Yunong, Lao Wenchao, Yin Yonghua, Xiao Lin, and Chen Jinhao. Weights and Structure Determination of Pruning-While-Growing Type for 3-Input Power-Activation Feed-Forward Neuronet [C]. In: Proceedings of 2012 IEEE International Conference on Automation and Logistics.
- [4] 张雨浓, 陈锦浩, 林业宏. (半)正/负定矩阵数学符号表示的科学性分析. 中国科技信息 [J], 2012 (6): 52-53.
- [5] 张雨浓, 陈宇曦, 陈锦浩, 殷勇华. 一点超前数值差分公式的提出、研究与实践 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 51 (2): 1-5
- [6] 张雨浓, 罗飞恒, 陈锦浩, 黎卫兵. 三输入伯努利神经网络权值与结构双确定 [J]. (审稿中)

毕业论文成绩评定记录

指导教师评语：

该论文内容上有较强的创新性，同时，具有一定的实际应用价值。整个研究过程，该文作者能严格按照已定的进度安排，很好地完成了毕业论文的整体撰写工作。同时，始终保持科学严谨的研究态度和学习热情，积极与老师及实验室的同学进行探讨。此外，该作者在毕业论文的撰写工作中，已逐渐掌握独立的科研能力，能够在完成毕业论文之余，成功完成数篇杂志论文和国际会议论文的投稿，其中已有部分被录用发表。另外，该论文撰写规范，文字、图和表的合理结合，章节间具有条理性的区分，保证了改论文整体思路通顺，研究内容表达清晰，更重要的是，所有数据结果均经过多次校对，真实性和科学性得到最大的保障。综上所述，该论文已达到优秀的水平。

成绩评定：优秀

指导教师签名：张雨浓

2012年5月4日

答辩小组或专业负责人意见：

成绩评定：

签名（章）：

年 月 日

院系负责人意见：

成绩评定：

签名（章）：

年 月 日