

单输入神经网络的性能比较 以及 二输入Legendre神经网络的建立

专 业：自动化
答 辩 人：陈锦浩
学 号： **08378040**





1) 前言

2) 多类单输入多项式神经网络预测能力比较

3) 二输入**Legendre**正交基神经网络

4) 总结与展望



前言

研究现状:

人为给定期望逼近精度
数据预测的广泛应用
多输入的现实系统
多输入多项式神经网络
缺少权值与结构确定算法

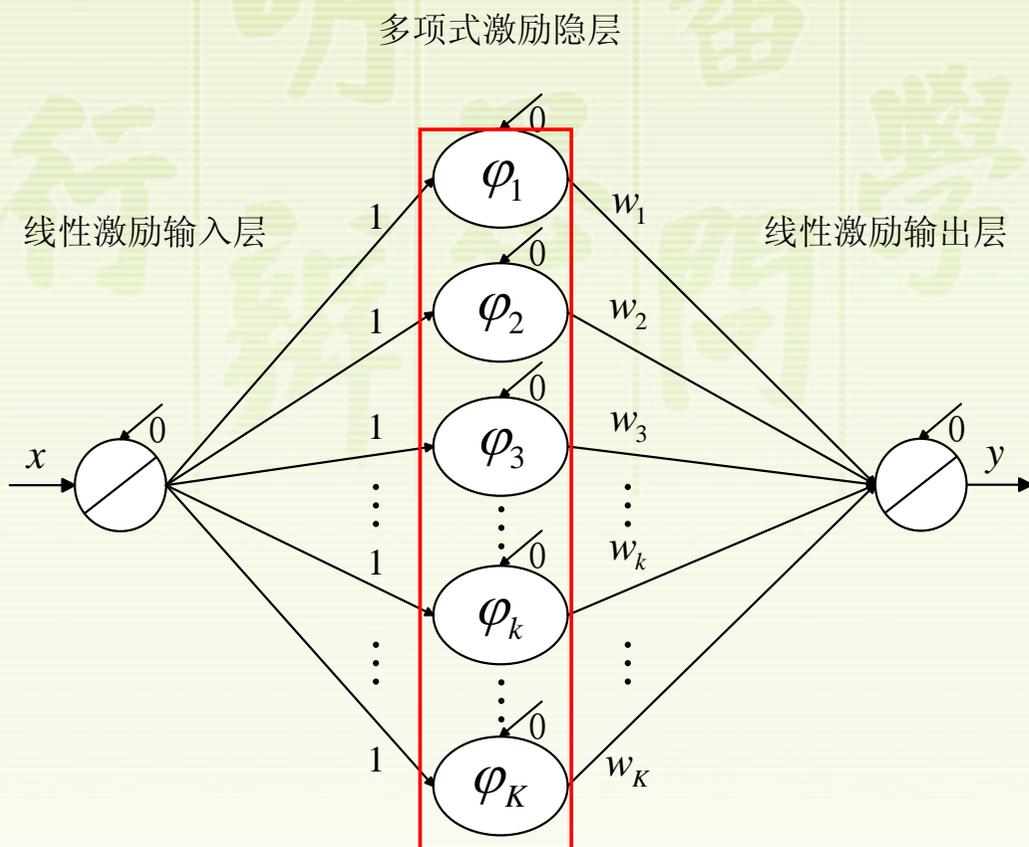
研究内容:

无需给定参数,适用于
多种网络的结构确定法
确定预测效果好的网络
二输入Legendre网络
适用于二输入网络的权
值与结构确定法



多类单输入多项式神经网络预测能力比较

2.1 单输入多项式神经网络模型



Legendre多项式

Hermite多项式

第一类Chebyshev多项式

第二类Chebyshev多项式

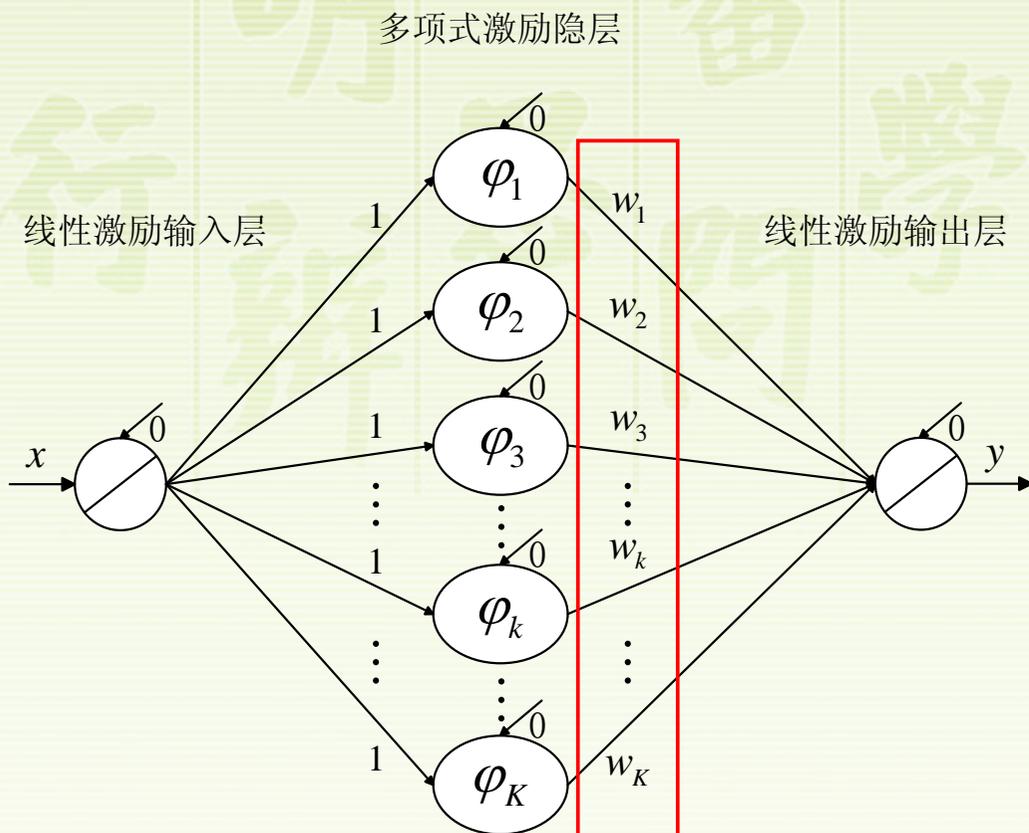
Bernoulli多项式

幂函数



多类单输入多项式神经网络预测能力比较

2.2 增长型权值与结构确定算法



单输入多项式神经网络中隐层与输出层的最优权值可以直接确定为

$$\mathbf{w} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$



多类单输入多项式神经网络预测能力比较

2.2 增长型权值与结构确定算法

$$\mathbf{w} := \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_K \end{bmatrix} \in R^K \quad \leftarrow \quad \mathbf{w} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\gamma} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma} := \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_q \\ \vdots \\ \gamma_Q \end{bmatrix} \in R^Q$$
$$\mathbf{X} := \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_K(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_K(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_Q) & \varphi_2(x_Q) & \cdots & \varphi_K(x_Q) \end{bmatrix} \in R^{Q \times K}$$



多类单输入多项式神经网络预测能力比较

2.2 增长型权值与结构确定算法

定义均方误差 E 为

$$E = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \left(\gamma_q - \sum_{k=1}^K w_k \varphi_k(\chi_q) \right)^2$$

学习数据量

第 q 个期望输出

第 q 个输入



多类单输入多项式神经网络预测能力比较

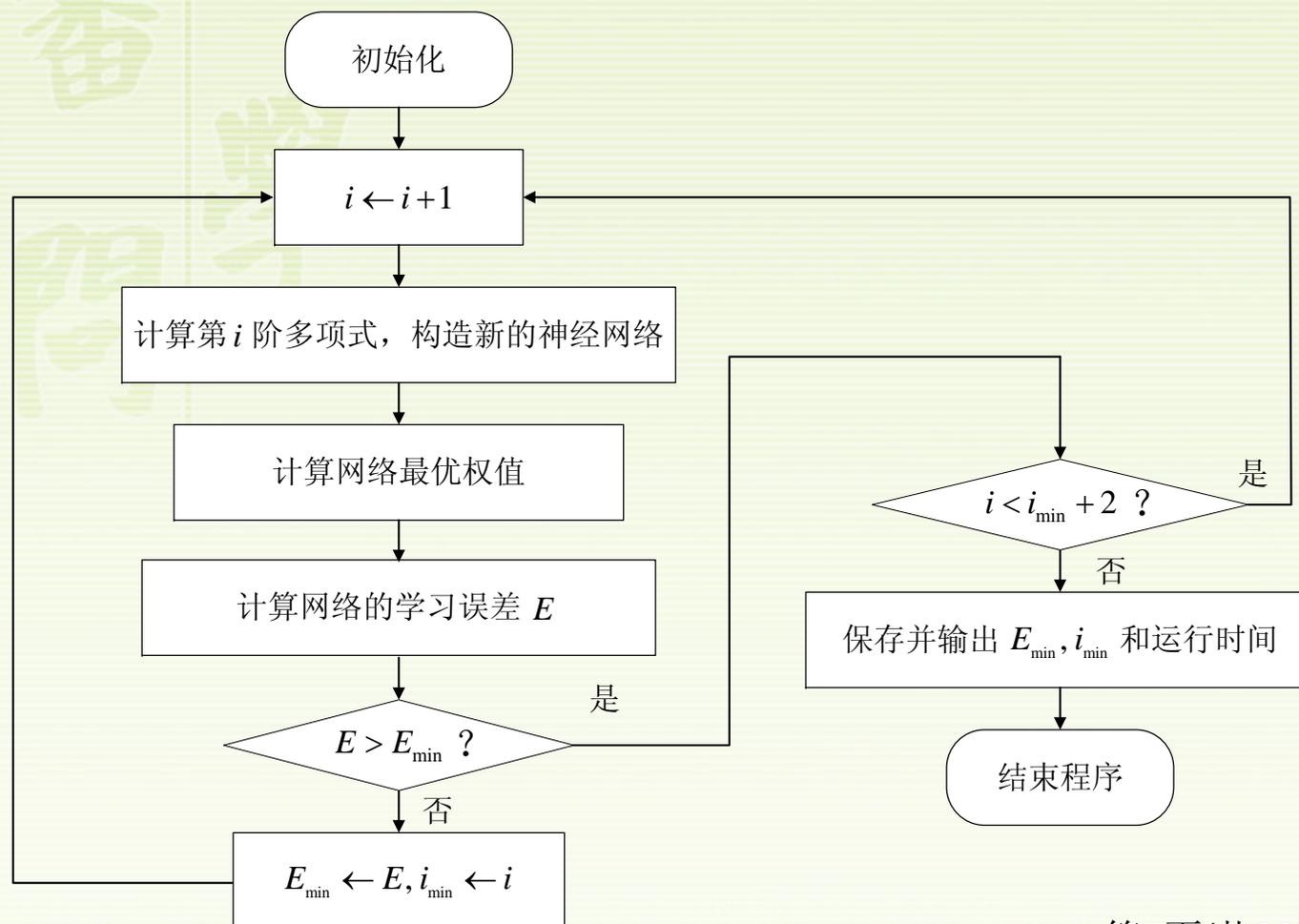
2.2 增长型权值与结构确定算法

E : 当前网络的均方误差;

E_{\min} : 当前找到的最小均方误差;

i : 当前网络隐层神经元数;

i_{\min} : 当前找到的最优网络隐层神经元数。





多类单输入多项式神经网络预测能力比较

2.3 数值验证

接下来，我们将展示以下三个目标函数的仿真结果：

$$\gamma = x^2 \sin(3\pi x) + 15 \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{\cos(3\pi x)e^x}{\sin x + 2} + 20 \quad (2)$$

$$\gamma = e^{\sin(\pi x)} + 25 \quad (3)$$



多类单输入多项式神经网络预测能力比较

2.3 数值验证

	网络隐层激励函数	学习时间(s)	最优神经元数	最优学习误差
目标函数(1)	Legendre	0.11956	22	8.8205×10^{-16}
	Hermite	0.067223	15	1.1156×10^{-5}
	Chebyshev-I	0.13928	21	1.3372×10^{-15}
	Chebyshev-II	0.14376	22	2.0007×10^{-16}
	Bernoulli	0.050453	13	3.8108×10^{-6}
	幂函数	0.142	21	5.8051×10^{-15}
目标函数(2)	Legendre	0.09823	21	1.8475×10^{-16}
	Hermite	0.043337	14	3.1738×10^{-6}
	Chebyshev-I	0.11171	20	3.6245×10^{-16}
	Chebyshev-II	0.10474	21	4.9407×10^{-17}
	Bernoulli	0.056991	14	7.5882×10^{-8}
	幂函数	0.13244	20	1.0039×10^{-15}
目标函数(3)	Legendre	0.097464	21	5.2454×10^{-16}
	Hermite	0.029336	12	1.1204×10^{-8}
	Chebyshev-I	0.10266	21	1.5937×10^{-15}
	Chebyshev-II	0.11167	21	6.0244×10^{-16}
	Bernoulli	0.055466	14	5.15×10^{-9}
	幂函数	0.12111	21	4.4561×10^{-16}



多类单输入多项式神经网络预测能力比较

2.3 数值验证

	网络隐层激励函数	学习时间(s)	最优神经元数	最优学习误差
目标函数(1)	Legendre	0.11956	22	8.8205×10^{-16}
	Hermite	0.067223	15	1.1156×10^{-5}
	Chebyshev-I	0.13928	21	1.3372×10^{-15}
	Chebyshev-II	0.14376	22	2.0007×10^{-16}
	Bernoulli	0.050453	13	3.8108×10^{-6}
	幂函数	0.142	21	5.8051×10^{-15}
目标函数(2)	Legendre	0.09823	21	1.8475×10^{-16}
	Hermite	0.043337	14	3.1738×10^{-6}
	Chebyshev-I	0.11171	20	3.6245×10^{-16}
	Chebyshev-II	0.10474	21	4.9407×10^{-17}
	Bernoulli	0.056991	14	7.5882×10^{-8}
	幂函数	0.13244	20	1.0039×10^{-15}
目标函数(3)	Legendre	0.097464	21	5.2454×10^{-16}
	Hermite	0.029336	12	1.1204×10^{-8}
	Chebyshev-I	0.10266	21	1.5937×10^{-15}
	Chebyshev-II	0.11167	21	6.0244×10^{-16}
	Bernoulli	0.055466	14	5.15×10^{-9}
	幂函数	0.12111	21	4.4561×10^{-16}



多类单输入多项式神经网络预测能力比较

2.3 数值验证

	网络隐层激励函数	(0.6,0.7] 预测误差	(0.7,0.8] 预测误差	(0.8,0.9] 预测误差	(0.9,1] 预测误差
目标函数 (1)	Legendre	4.2237×10^{-8}	3.1051×10^{-4}	0.2345	53.3321
	Hermite	0.31384	33.816	1005.8324	14948.7948
	Chebyshev-I	1.9334×10^{-8}	4.6162×10^{-5}	1.0373×10^{-2}	0.43312
	Chebyshev-II	4.2237×10^{-8}	3.1051×10^{-4}	0.2345	53.3321
	Bernoulli	1.1305×10^{-2}	0.46267	0.9175	300.1336
	幂函数	1.9334×10^{-8}	4.6162×10^{-5}	1.0373×10^{-2}	0.43312
目标函数 (2)	Legendre	3.1465×10^{-9}	1.8091×10^{-6}	1.1515×10^{-3}	0.22934
	Hermite	1.0988×10^{-2}	0.65655	8.9055	34.5161
	Chebyshev-I	8.0518×10^{-9}	2.3982×10^{-5}	9.0677×10^{-3}	1.1509
	Chebyshev-II	3.1438×10^{-9}	1.809×10^{-6}	1.1515×10^{-3}	0.22934
	Bernoulli	3.8131×10^{-3}	0.77035	36.8943	809.4794
	幂函数	8.0515×10^{-9}	2.3982×10^{-5}	9.0677×10^{-3}	1.1509
目标函数 (3)	Legendre	1.1378×10^{-8}	1.4303×10^{-4}	0.1297	30.8332
	Hermite	8.286×10^{-5}	2.868×10^{-2}	1.7407	44.1003
	Chebyshev-I	1.1377×10^{-8}	1.4303×10^{-4}	0.1297	30.8332
	Chebyshev-II	1.1381×10^{-8}	1.4303×10^{-4}	0.1297	30.8332
	Bernoulli	7.5296×10^{-4}	0.1556	7.7271	179.8011
	幂函数	1.1378×10^{-8}	1.4303×10^{-4}	0.1297	30.8332



多类单输入多项式神经网络预测能力比较

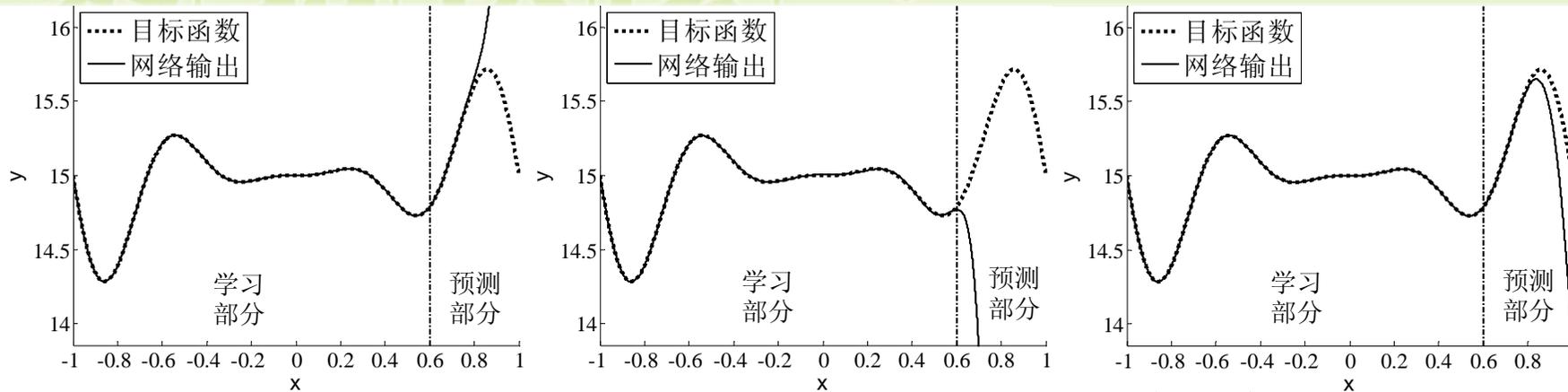
2.3 数值验证

	网络隐层激励函数	(0.6,0.7] 预测误差	(0.7,0.8] 预测误差	(0.8,0.9] 预测误差	(0.9,1] 预测误差
目标函数 (1)	Legendre	4.2237×10^{-8}	3.1051×10^{-4}	0.2345	53.3321
	Hermite	0.31384	33.816	1005.8324	14948.7948
	Chebyshev-I	1.9334×10^{-8}	4.6162×10^{-5}	1.0373×10^{-2}	0.43312
	Chebyshev-II	4.2237×10^{-8}	3.1051×10^{-4}	0.2345	53.3321
	Bernoulli	1.1305×10^{-2}	0.46267	0.9175	300.1336
	幂函数	1.9334×10^{-8}	4.6162×10^{-5}	1.0373×10^{-2}	0.43312
目标函数 (2)	Legendre	3.1465×10^{-9}	1.8091×10^{-6}	1.1515×10^{-3}	0.22934
	Hermite	1.0988×10^{-2}	0.65655	8.9055	34.5161
	Chebyshev-I	8.0518×10^{-9}	2.3982×10^{-5}	9.0677×10^{-3}	1.1509
	Chebyshev-II	3.1438×10^{-9}	1.809×10^{-6}	1.1515×10^{-3}	0.22934
	Bernoulli	3.8131×10^{-3}	0.77035	36.8943	809.4794
	幂函数	8.0515×10^{-9}	2.3982×10^{-5}	9.0677×10^{-3}	1.1509
目标函数 (3)	Legendre	1.1378×10^{-8}	1.4303×10^{-4}	0.1297	30.8332
	Hermite	8.286×10^{-5}	2.868×10^{-2}	1.7407	44.1003
	Chebyshev-I	1.1377×10^{-8}	1.4303×10^{-4}	0.1297	30.8332
	Chebyshev-II	1.1381×10^{-8}	1.4303×10^{-4}	0.1297	30.8332
	Bernoulli	7.5296×10^{-4}	0.1556	7.7271	179.8011
	幂函数	1.1378×10^{-8}	1.4303×10^{-4}	0.1297	30.8332



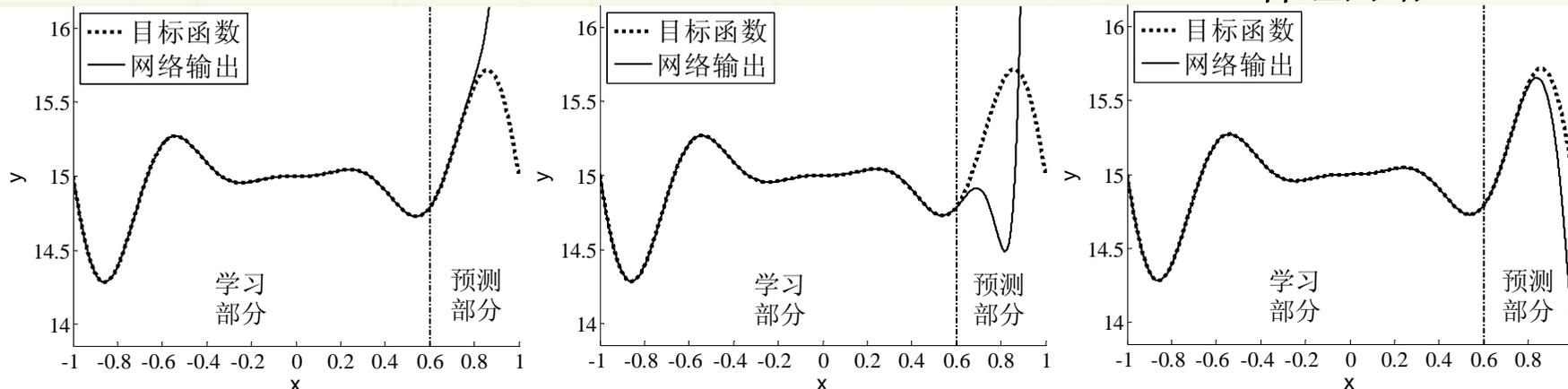
多类单输入多项式神经网络预测能力比较

2.3 数值验证



(a) Legendre多项式神经网络 (b) Hermite多项式神经网络 (c) 第一类Chebyshev多项式神经网络

目标函数
(1)

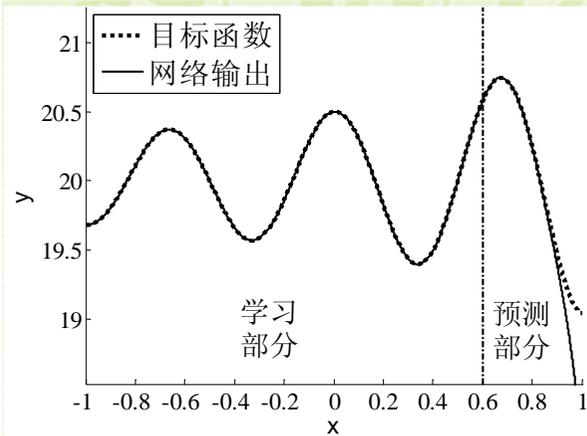


(d) 第二类Chebyshev多项式神经网络 (e) Bernoulli多项式神经网络 (f) 幂激励神经网络

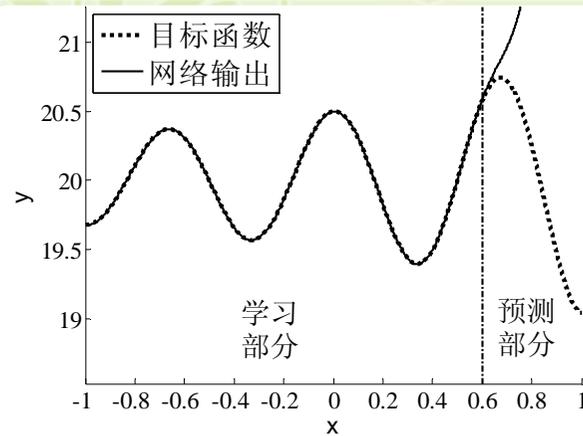


多类单输入多项式神经网络预测能力比较

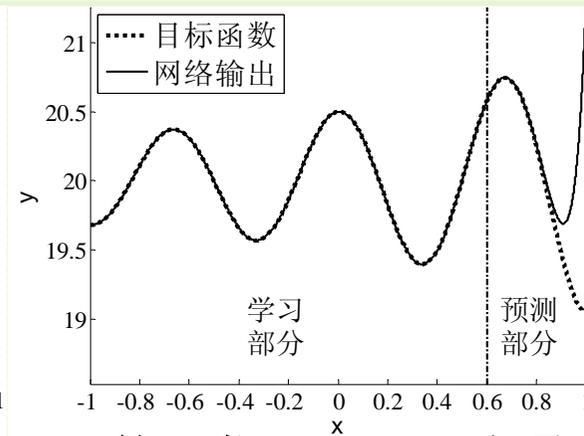
2.3 数值验证



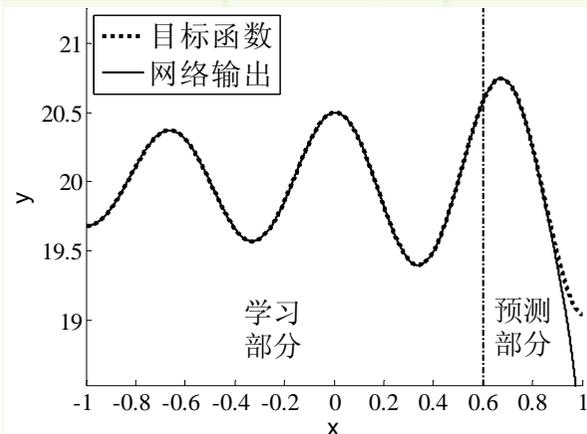
(a) Legendre多项式神经网络



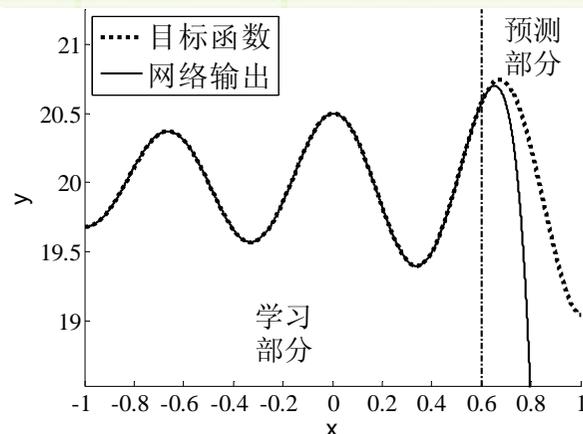
(b) Hermite多项式神经网络



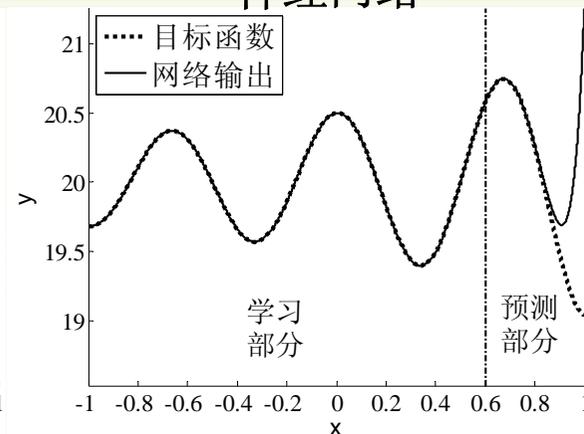
(c) 第一类Chebyshev多项式神经网络



(d) 第二类Chebyshev多项式神经网络



(e) Bernoulli多项式神经网络



(f) 幂激励神经网络

目标函数
(2)



多类单输入多项式神经网络预测能力比较

2.4 本章小结

- 1) 构建六种单输入多项式神经网络;
- 2) 设计统一的, 无需给定参数的权值与结构确定法;
- 3) 研究比较了六种网络的学习和预测性能。

注: 本章已整理成论文准备投稿《系统仿真学报》



二输入Legendre正交基神经网络

3.1 理论基础

引理1. 对于两个连续独立变量 x_1 和 x_2 ，给定连续目标函数 $F(x_1, x_2)$ ，存在多项式 $g_k(x_1)$ 和 $h_k(x_2)$ ($k=1,2,3,\dots$) 使得

$$F(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x_1)h_k(x_2)$$



二输入Legendre正交基神经网络

3.1 理论基础

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m \varphi_m(x_1) b_n \varphi_n(x_2) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{m,n} \varphi_m(x_1) \varphi_n(x_2) \\ &\approx \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_m} \omega_{m,n} \varphi_m(x_1) \varphi_n(x_2) \\ &= \sum_{m=1}^M \varphi_m(x_1) \left(\sum_{n=1}^{N_m} \omega_{m,n} \varphi_n(x_2) \right) \\ &= \sum_{k=1}^K w_k \phi_k(x_1, x_2) \end{aligned}$$

多项式权值

Legendre多项式



二输入Legendre正交基神经网络

3.1 理论基础

限制法则I $M = i - 1$ 且 $N_m = i - 1$,

$$m = 1, 2, 3, \dots, M ;$$

限制法则II $M = i - 1$ 且 $N_m = i - m$,

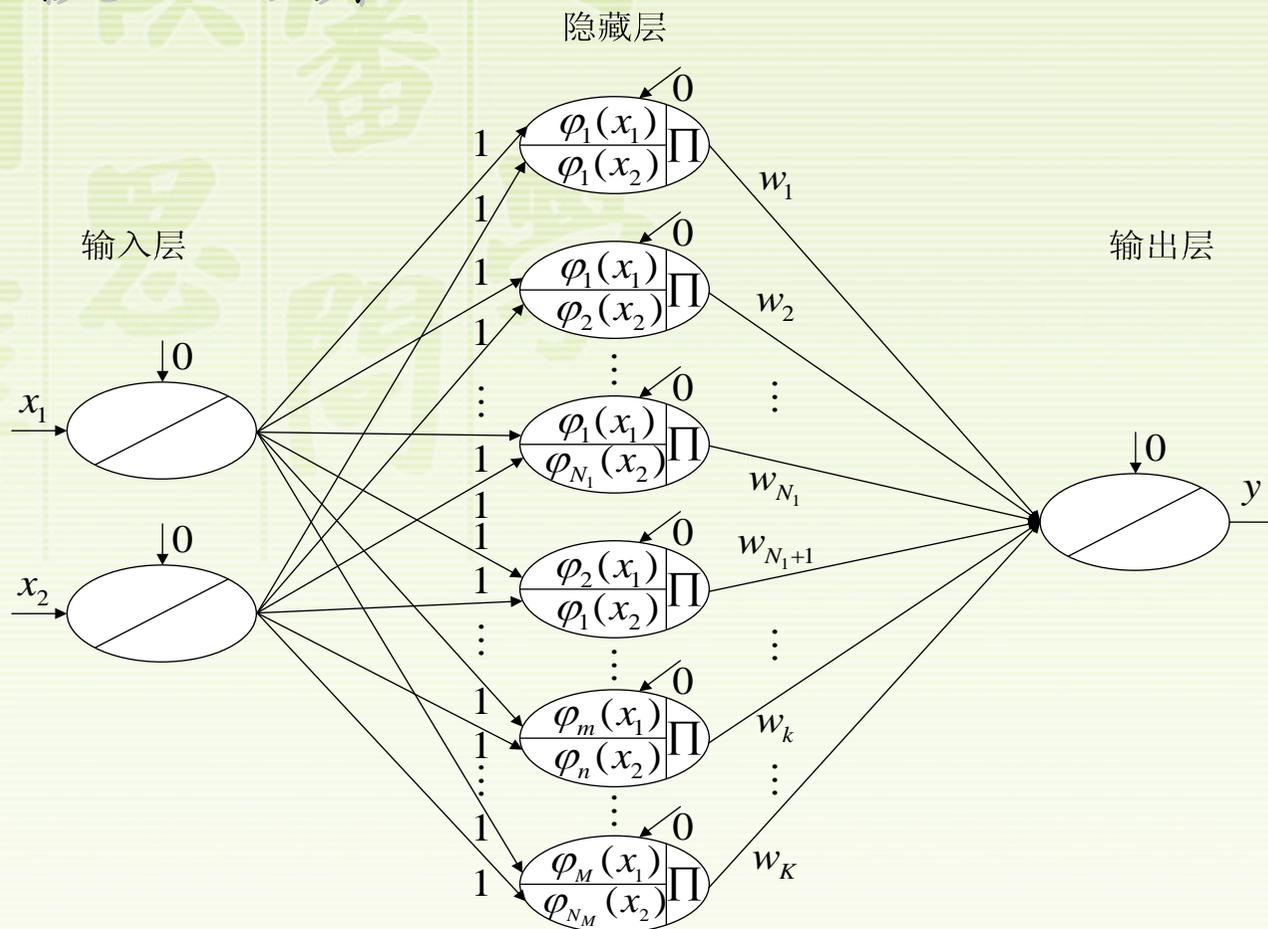
$$m = 1, 2, 3, \dots, M 。$$

i	限制法则I		限制法则II	
	$[N_1 N_2 \dots N_{i-1}]$	K	$[N_1 N_2 \dots N_{i-1}]$	K
2	[1]	1	[1]	1
3	[2 2]	4	[2 1]	3
4	[3 3 3]	9	[3 2 1]	6
5	[4 4 4 4]	16	[4 3 2 1]	10
6	[5 5 5 5 5]	25	[5 4 3 2 1]	15
7	[6 6 6 6 6 6]	36	[6 5 4 3 2 1]	21
8	[7 7 7 7 7 7 7]	49	[7 6 5 4 3 2 1]	28
9	[8 8 8 8 8 8 8 8]	64	[8 7 6 5 4 3 2 1]	36
10	[9 9 9 9 9 9 9 9 9]	81	[9 8 7 6 5 4 3 2 1]	45



二输入Legendre正交基神经网络

3.2 网络模型与算法



二输入Legendre正交基神经网络结构



二输入Legendre正交基神经网络

3.2 网络模型与算法

接下来，我们通过以下三个目标函数研究网络学习误差以及神经元数间的关系：

$$F(x_1, x_2) = 10 \sin(x_1) e^{-(2x_1)^2 - (2x_2)^2} \quad (4)$$

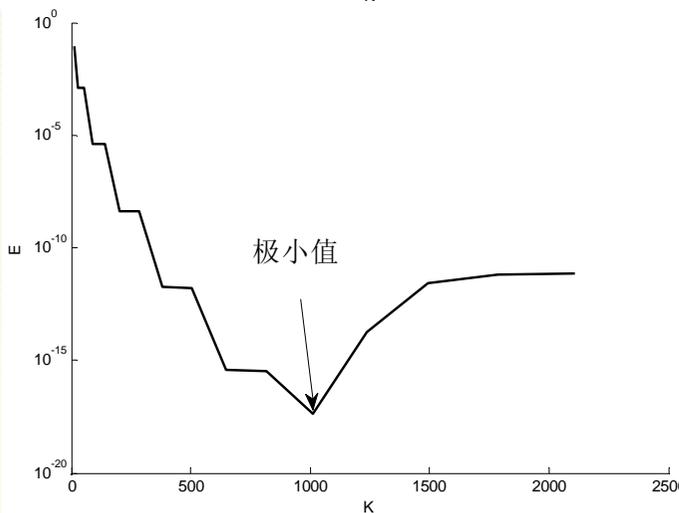
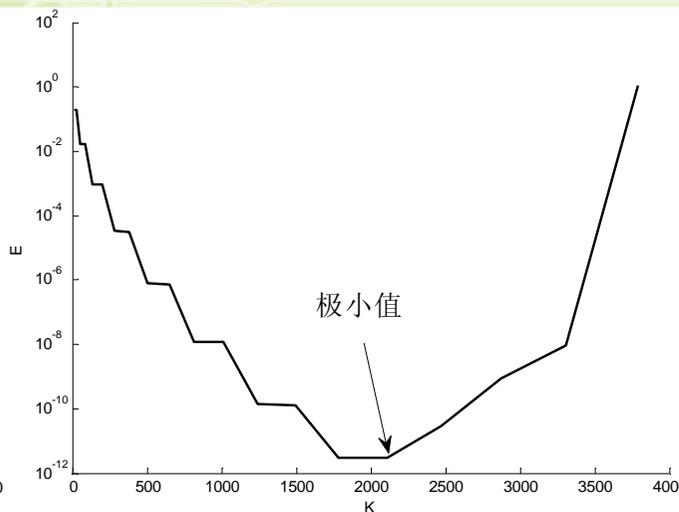
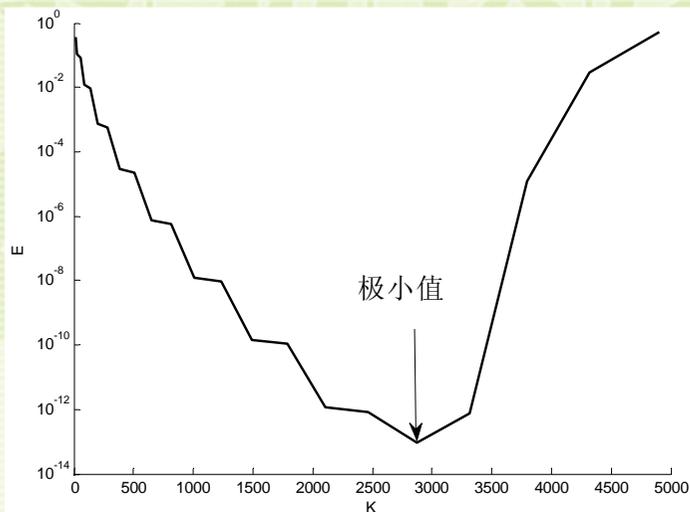
$$F(x_1, x_2) = 4e^{-x_1^2 - (2x_2)^2} + 10 \quad (5)$$

$$F(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1 x_2) + 20 \quad (6)$$



二输入Legendre正交基神经网络

3.2 网络模型与算法



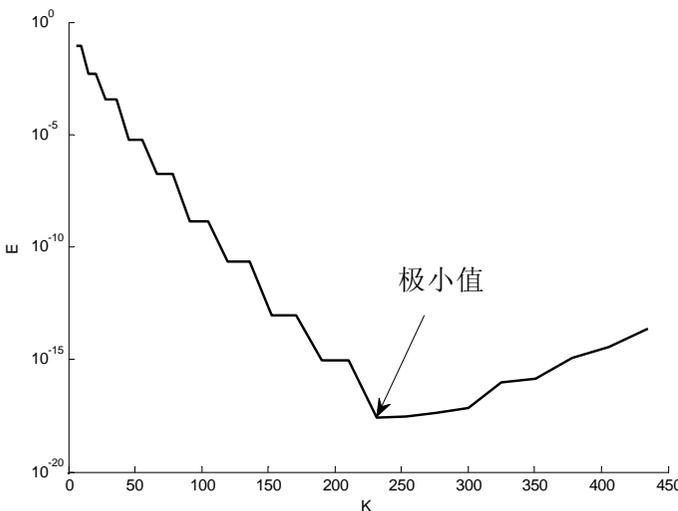
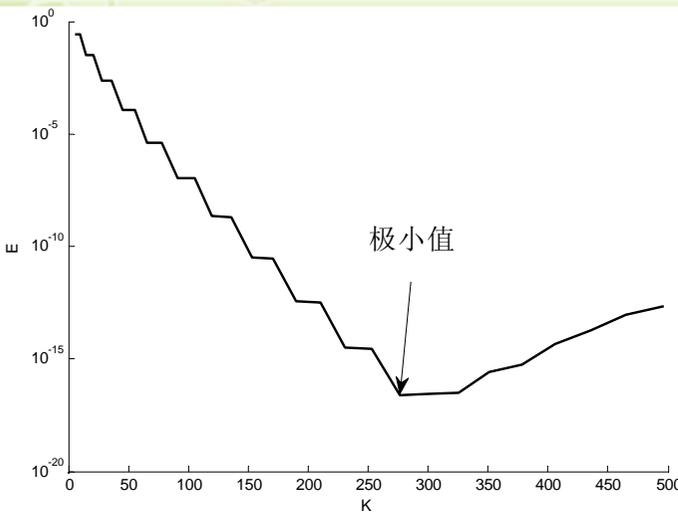
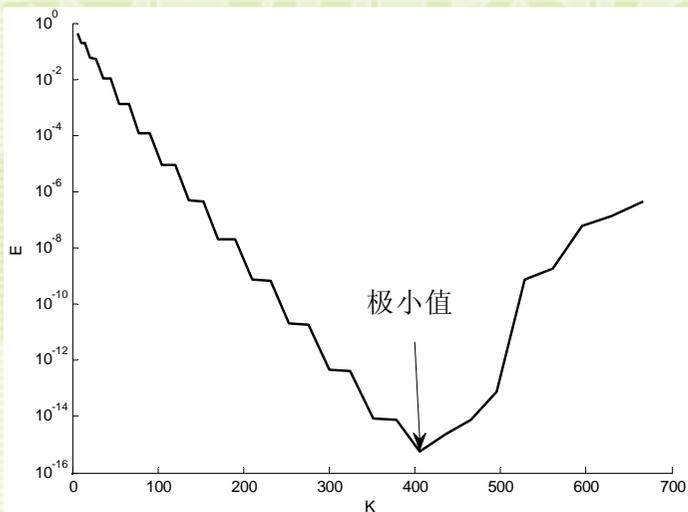
目标函数 (4)	目标函数 (5)
	目标函数 (6)

采用
限制
法则
I



二输入Legendre正交基神经网络

3.2 网络模型与算法



目标函数 (4)	目标函数 (5)
	目标函数 (6)

采用
限制
法则
II



二输入Legendre正交基神经网络

3.2 网络模型与算法

E : 当前网络的均方误差;

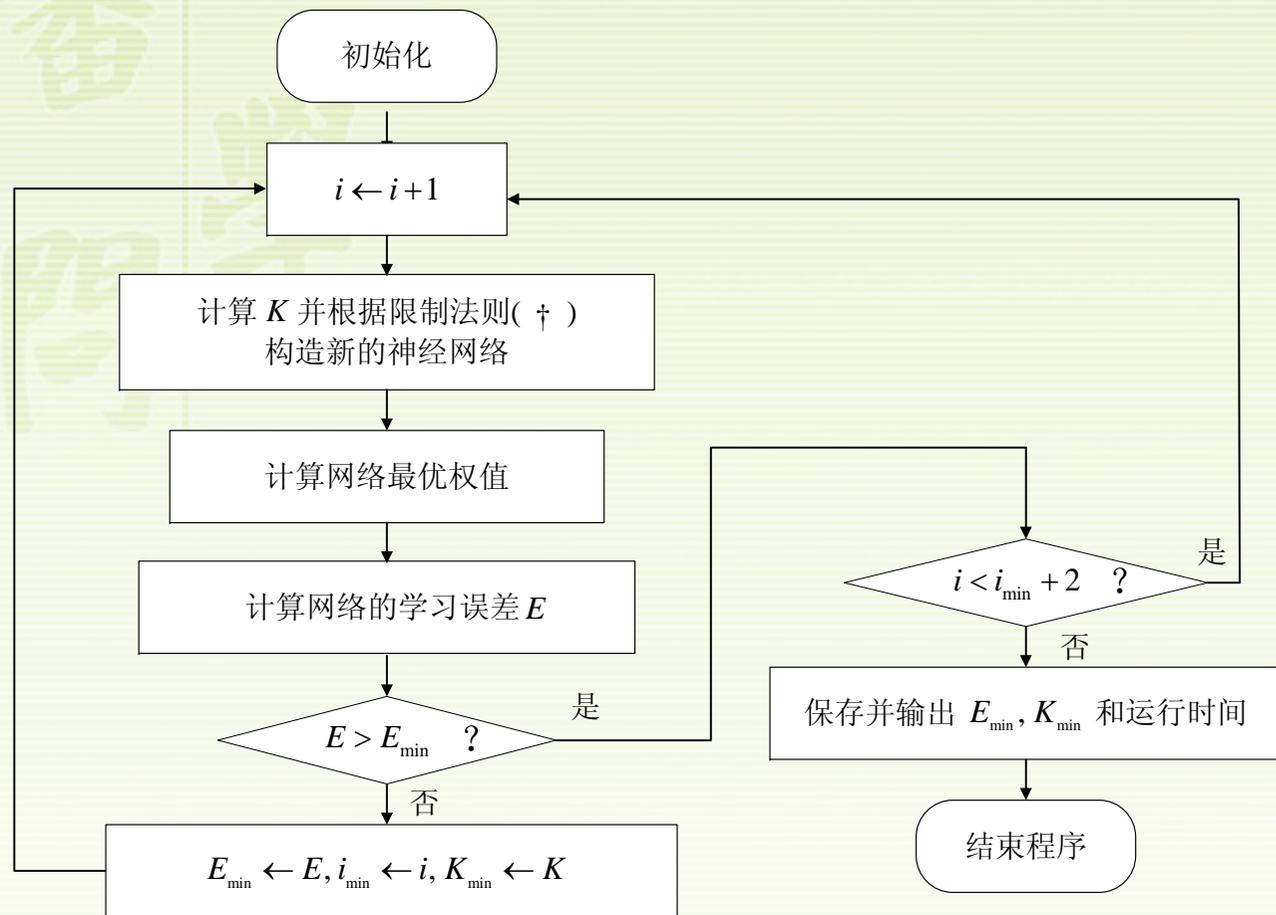
E_{\min} : 当前找到的最小均方误差;

i : 当前网络隐层神经元数;

i_{\min} : 当前找到的最优网络隐层神经元数;

K : 当前网络的隐层神经元数目;

K_{\min} : 当前找到的最优网络隐层神经元数。





二输入Legendre正交基神经网络

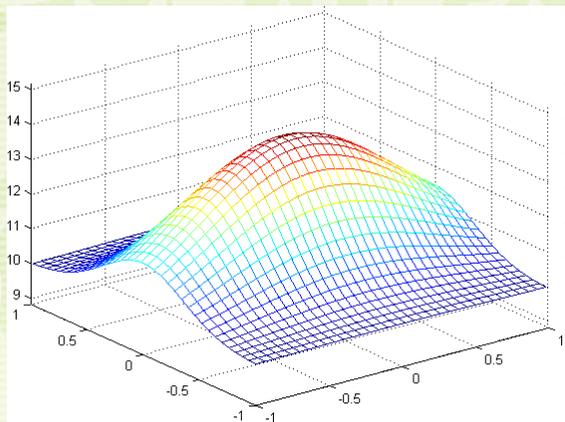
3.3 数值实验结果

	目标函数	最优神经元数 K_{\min}	最优学习误差 E_{approx}	检验误差 E_{test}	学习时间(s)
限制法则 I	(4)	2869	9.240×10^{-14}	6.606×10^{-13}	326.935
	(5)	2108	2.934×10^{-12}	6.726×10^{-12}	211.585
	(6)	1014	4.194×10^{-18}	2.403×10^{-18}	73.346
限制法则 II	(4)	406	5.937×10^{-16}	9.928×10^{-16}	13.731
	(5)	276	2.454×10^{-17}	8.715×10^{-16}	5.309
	(6)	231	2.645×10^{-18}	2.926×10^{-18}	3.570

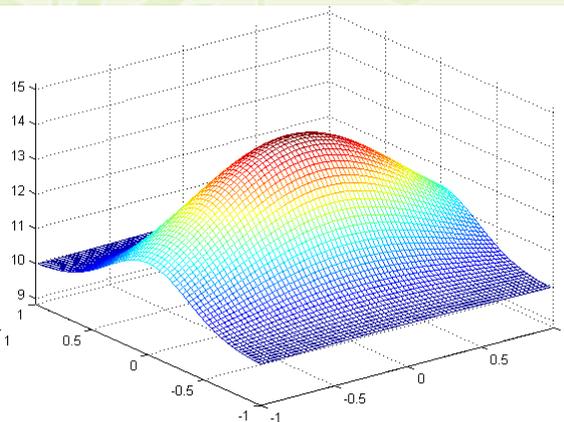


二输入Legendre正交基神经网络

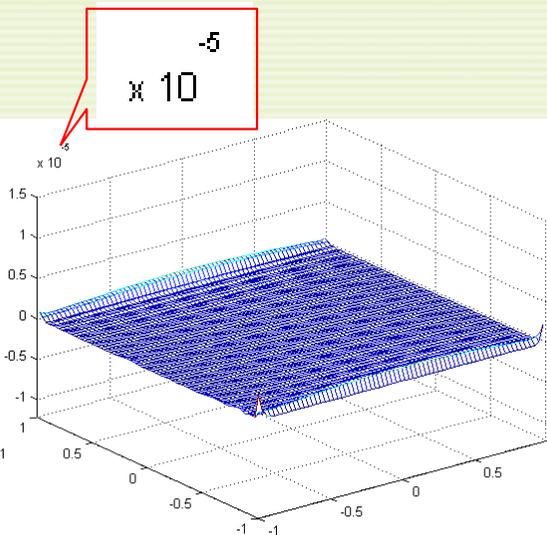
3.3 数值实验结果



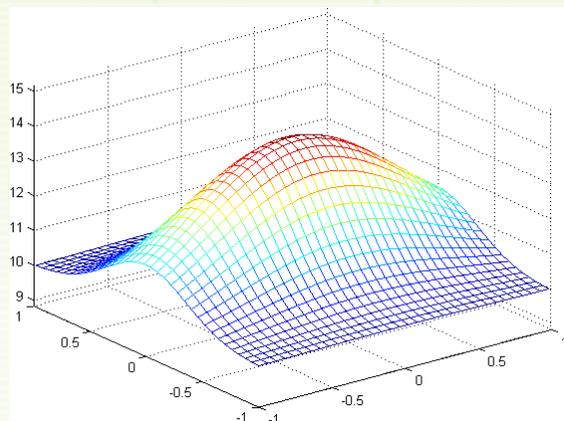
(a) 采用限制法则I的学习结果



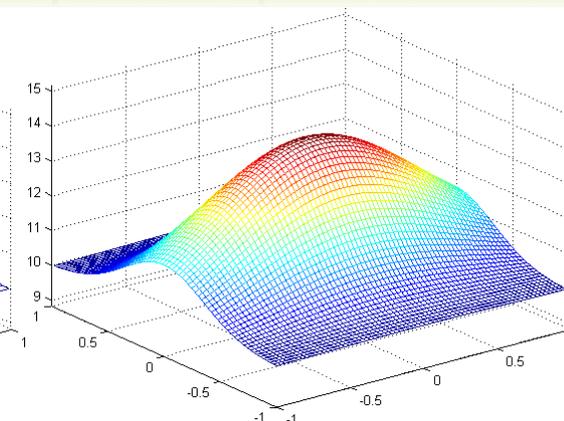
(c) 采用限制法则I的校验结果



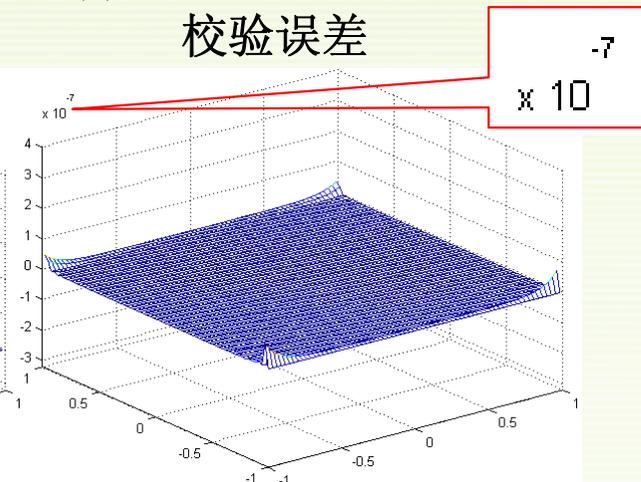
(e) 采用限制法则I的校验误差



(b) 采用限制法则II的学习结果



(d) 采用限制法则II的校验结果



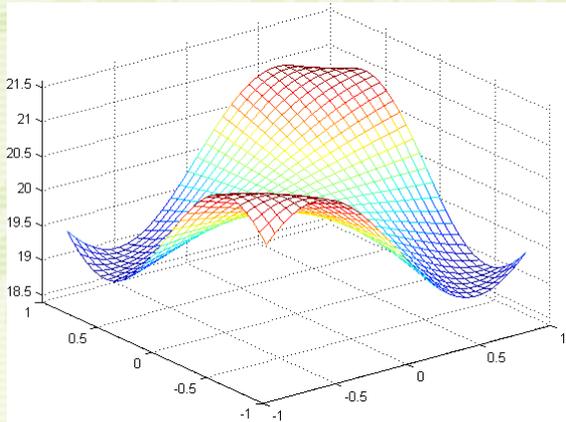
(f) 采用限制法则II的校验误差

目标函数
(5)

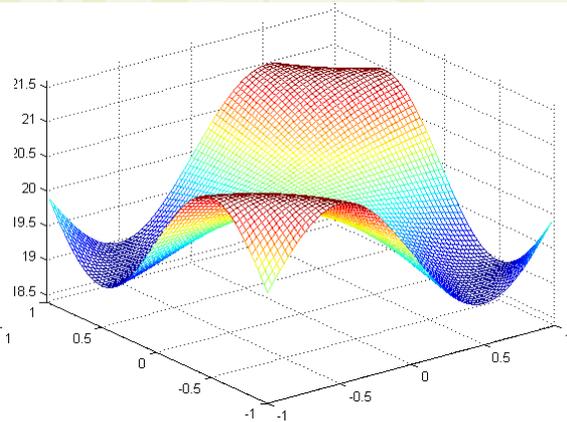


二输入Legendre正交基神经网络

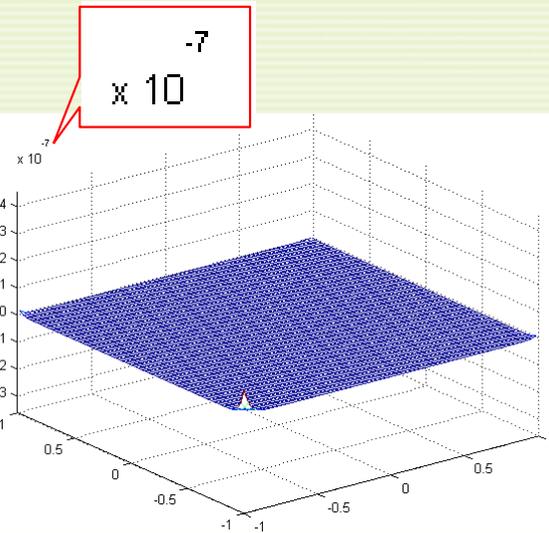
3.3 数值实验结果



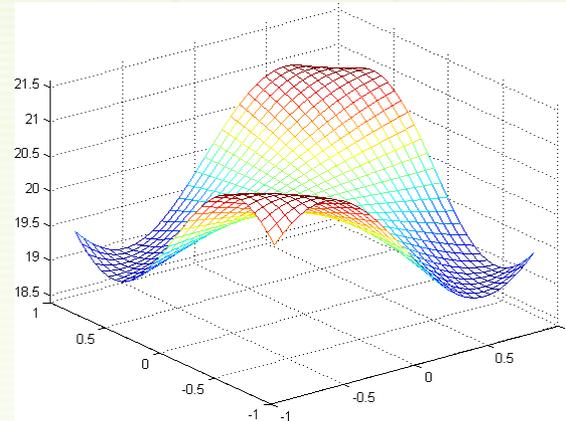
(a) 采用限制法则I的学习结果



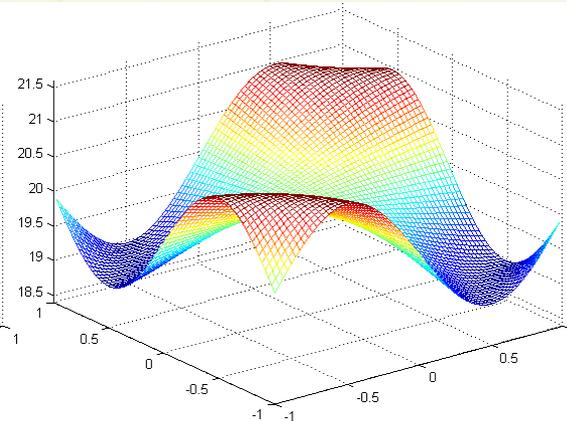
(c) 采用限制法则I的预测和校验结果



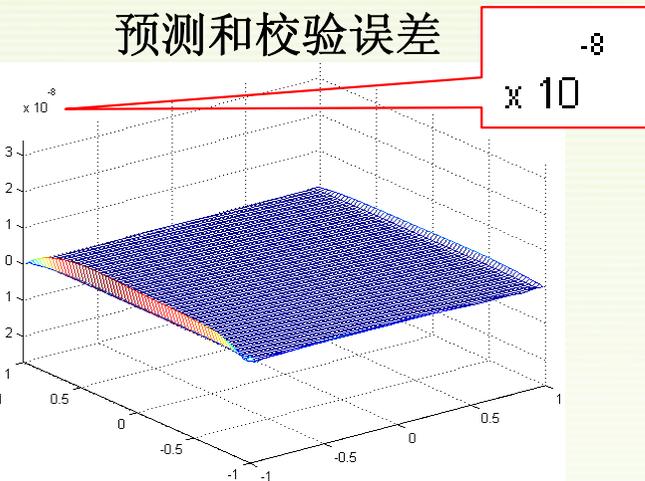
(e) 采用限制法则I的预测和校验误差



(b) 采用限制法则II的学习结果



(d) 采用限制法则II的预测和校验结果



(f) 采用限制法则II的预测和校验误差

目标函数
(6)



二输入Legendre正交基神经网络

3.4 本章小结

- 1) 设计二输入Legendre正交基神经网络;
- 2) 设计两种增长型权值与结构确定法;
- 3) 研究所设计的二输入网络的学习、泛化和预测性能, 并对两种算法进行了比较;

注: 本章已整理成英文论文并已被21st IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE 2012) 国际会议录用



总结与展望

研究内容:

- 1) 建立统一化的适用于各种多项式神经网络的增长型权值与结构确定算法;
- 2) 多类单输入多项式神经网络的学习能力比较;
- 3) 多类单输入多项式神经网络的预测能力比较;
- 4) 二输入Legendre神经网络的建立;
- 5) 建立两种增长速度不同的权值与结构确定算法;
- 6) 二输入多项式神经网络的学习能力及预测能力分析。

研究展望:

- 1) 进一步将多项式神经网络跟BP神经网络、RBF以及Hopfield神经网络进行预测能力的比较,最终确定出预测能力最优越的神经网络;
- 2) 进一步优化权值与结构确定算法;
- 3) 适用性更广的权值与结构确定算法;
- 4) 人工神经网络的硬件实现。



感谢导师在该论文完成过程中的指导和帮助!

在导师的指导下，还发表以下论文：
已录用：

- [1] 学生第一作者， Growing-Type Weights and Structure Determination of 2-Input Legendre Orthogonal Polynomial Neuronet, 2012 ISIE国际会议
- [2] 学生第一作者， (半)正/负定矩阵数学符号表示的科学性分析， 中国科技信息2012年第6期
- [3] 学生第二作者， 一点超前数值差分公式的提出、研究与实践， 中山大学学报（自然科学版）第51卷第2期
- [4] 学生第四作者， The 3-Input Euler Polynomial Neuronet (3IEPN) with Weights-and-Structure-Determination (WASD) Algorithm, 2012 ICMIC国际会议
- [5] 学生第四作者， Weights and Structure Determination of Pruning-While-Growing Type for 3-Input Power-Activation Feed-Forward Neuronet, 2012 ICAL 国际会议

审稿中：

- [6] 学生第二作者， 三输入伯努利神经网络权值与结构双确定， 计算机工程与科学
- [7] 学生第二作者， 龙格现象难题破解之系数与阶次双确定方法， 计算机学报
- [8] 学生第二作者， Presentation, error analysis and numerical experiments on a group of 1-step-ahead numerical differentiation formulas, Journal of Computational and Applied Mathematics

待发表：

- [9] 学生第一作者， 多类单输入多项式神经网络预测能力比较， 系统仿真学报